Construction d'une catégorie d'espaces de Berkovich sur Z et étude locale de leur topologie

Thibaud Lemanissier

Université Pierre et Marie Curie

École Doctorale de Sciences Mathématiques de Paris Centre

Thèse de doctorat

Discipline : Mathématiques

présentée par

Thibaud Lemanissier

Construction d'une catégorie d'espaces de Berkovich sur $\mathbb{Z}$ et étude locale de leur topologie

---

dirigée par Antoine Ducros

Soutenue le 2 octobre 2015 devant le jury composé de :

M. Antoine Chambert-Loir	Université Paris 7	examinateur
M. Antoine Ducros	Université Paris 6	directeur
M. Johannes Nicaise	University of Leuven	rapporteur
M. Frédéric Paugam	Université Paris 6	examinateur
M. Jérôme Poineau	Université Caen	examinateur
M. Michael Temkin	University of Jerusalem	rapporteur

Institut de Mathématiques de Jussieu
175, rue du chevaleret
75 013 Paris

UPMC
Ecole Doctorale de Sciences
Mathématiques de Paris Centre
4 place Jussieu
75252 Paris Cedex 05
Boite courrier 290

À T.

« Les mathématiciens sont comme les français : quoique vous leur dites ils le traduisent dans leur propre langue et le transforment en quelque chose de totalement différent »
Goethe

« C'est quand même dommage que la thèse finisse par la rédaction »
Flora Cellier-Holzem

Remerciements

Commençons ces quelques lignes en exprimant la gratitude que j'éprouve pour mes directeurs. Dans un premier temps, je remercie Frédéric Paugam pour son encadrement plein d'énergie et d'enthousiasme qui m'a guidé durant mon mémoire et le début de ma thèse. Je remercie ensuite Antoine Ducros pour m'avoir forcé à acquérir un peu de la rigueur mathématique, qui me faisait tellement défaut, durant la fin de cette thèse. Il a aussi toujours su pointer les « évidences » que j'aurais volontiers laissées de côté dans un premier temps et qui ont fini par fournir le principal corps de ce texte.

Je remercie ensuite Johannes Nicaise et Michael Temkin pour avoir lu attentivement mon manuscrit de thèse et pour m'avoir fourni des remarques et des suggestions de corrections simplifiant notoirement la compréhension de certains énoncés.

Je suis reconnaissant à Antoine Chambert-Loir et Jérôme Poineau d'avoir accepté d'évaluer mon travail. En ce qui concerne le second je tiens aussi à le remercier de m'avoir ouvert la porte des espaces de Berkovich sur $\mathbb{Z}$ que ce soit grâce à son livre ou aux différentes conversations que nous avons eues qui furent toujours fructueuses.

Il me faut aussi mentionner l'ensemble des membres de l'équipe d'analyse algébrique de l'Institut de Mathématiques de Jussieu-Paris Rive Gauche qui m'a fourni tout au long de ma thèse un environnement de travail extrêmement chaleureux.

Je tiens à remercier tous les gens du couloir des thésards de Jussieu et en particulier tous mes cobureaux qu'ils soient en 513 -Andres, Raphaël, Tran- ou en 506 -Erik, Juliette, Cyrus. Citons aussi quelques noms dans une liste non exhaustive Adjai, Adrien, Anne, Arthur, Charles, Christophe, François P., Gabriel, Joanes, Karam, Kamran, Léo, Louis, Miguel, Nicolas, Ruben, et Samuel. Il y a aussi la "Berko"-team des thésards de Jussieu qui comprenait Daniele, Florent, John, et Marc.

Je vais tout de même m'attarder sur un certain nombre de « cas », dans un ordre totalement aléatoire, je remercie Malick pour avoir été d'une disponibilité à toute épreuve pour faire des pauses interminables, François pour savoir penser aux gens qui ont faim à table (et le faire en toute délicatesse), Liana pour toujours avoir le mot à portée des lèvres qui me rappellera que je suis nul en anglais, Daniele pour avoir toujours été prêt à m'expliquer ses maths et avoir subi patiemment mes enthousiasmes « Berkovichite » (il y a des néologismes qui sont plus réussis que d'autres), Olivier pour colporter des rumeurs sur ma personne qui sont, somme toute, infondées (ou presque), Maÿlis pour avoir eu une bonne humeur d'une solidité impressionnante, Juliette pour avoir une capacité à toute épreuve à ne pas bosser par solidarité, Florian qui bien que faisant parti de Serpentard a sut fraterniser avec Gryffondor et enfin Ahcène qui malgré le fait qu'il n'ait jamais eu de bureau dans ce couloir a toujours fait comme si c'était le cas.

Il reste encore quelques personnes qui seraient en droit de se plaindre si elles se trouvaient exclues de ces pages. Ces personnes, je les ai probablement moins vues durant ces quatre années du fait qu'elles ne soient pas des locataires du couloir des thésards de l'IMJ-PRG mais malgré tout elles ont été présentes de manière agréable et remarquable. Je pense en particulier à Alain, Amine, Benjamin, Delphine, Frank, Laura, Marilyne, Mattias, Olivier (un autre), Simon, Thibaud (pas moi), et Zoé.

Ma gratitude va aussi à toute ma famille qui m'a toujours encouragé dans mes choix d'orientation même s'ils ne savaient pas toujours de quoi il retournait.

Je remercie aussi Dominique pour sa relecture attentive et ses nombreuses (très nombreuses) remarques qui m'ont été très utiles dans la rédaction de ce manuscrit.

Enfin, il y a bien entendu une personne qu'il est incontestablement nécessaire de remercier. Elle a rythmé ce travail en y apportant les virgules et les points et a apaisé les déprimes que les difficultés ont pu faire naître. Merci à toi Flora.

Résumé

Dans cette thèse, nous allons dans un premier temps proposer une définition d'espaces analytiques sur un anneau d'entiers de corps de nombres muni de la norme induite par le maximum des normes de ses différents plongements complexes. Cette définition s'appuie sur la théorie des espaces analytiques sur un corps non archimédien introduite par V. Berkovich.

Nous montrerons ensuite que la définition que nous proposons donne lieu à une catégorie qui satisfait des propriétés essentielles comme une description « simple » des ensembles morphismes entre espaces analytiques, l'existence de produits fibrés et d'un foncteur d'analytification induit par une propriété universelle.

Dans une troisième partie, nous étudierons divers propriétés des morphismes finis entre espaces analytiques et en déduirons la connexité locale par arcs des espaces analytiques sur un anneau d'entiers de corps de nombres muni de la norme décrite ci-dessus.

Enfin, nous définirons une notion de dimension pour les espaces de Berkovich sur un anneau d'entiers de corps de nombres et étudierons plus en détail le foncteur d'analytification en montrant par exemple que le morphisme d'analytification est fidèlement plat et que ce foncteur respecte la dimension.

Mots-clefs

Espace de Berkovich, géométrie algébrique sur $\mathbb{Z}$, fonctions analytiques à coefficients dans $\mathbb{Z}$, topologie des espaces analytiques.

Construction of a category of Berkovich spaces over $\mathbb{Z}$ and a local study of their topology

Abstract

In the first part of this thesis, we give a definition of analytic spaces over a ring of integers of a number field provided with the norm induced by the maximum of the norms of thel complex embeddings. This definition uses V. Berkovich's theory of analytic spaces over a non-archimedean field.

Then we show that this definition leads to a category which satisfies some basic properties as a "simple" description of sets of morphisms between analytic spaces, the existence of fiber products and analytification functor defines by a universal property.

In a third part, we study some properties of finite morphisms between analytic spaces and deduce the local arcwise connectedness of analytic spaces over a ring of integers of a number field provided with the norm described above.

Finally, we define a notion of dimension for Berkovich spaces over a ring of integers of number field and study in more detail the analytification fonctor, in particular, that the analytification morphism is faithfully flat and that this functor respects dimension.

Keywords

Berkovich spaces, algebraic geometry over $\mathbb{Z}$, analytic function with coefficient in $\mathbb{Z}$, analytic spaces' topology.

Table des matières

Introduction

Les nombreuses conjectures sur les points entiers et l'intervention des modèles entiers pour l'étude des points rationnels des variétés arithmétiques font de la théorie des variétés algébriques sur $\mathbb{Z}$ un domaine extrêmement vivant de la géométrie arithmétique. La géométrie analytique complexe et la géométrie analytique p-adique ont montré ce qu'elles pouvaient apporter à la géométrie algébrique sur les corps correspondants. Il devient alors clair qu'un outil analogue dans le cas de la géométrie algébrique sur $\mathbb{Z}$ pourrait s'avérer d'une utilité cruciale. La géométrie d'Arakelov est en quelque sorte une réponse possible à ce besoin. J. Poineau, dans sa thèse (voir le livre [Poi10]), a proposé une nouvelle approche pour obtenir une notion pertinente d'espace analytique sur $\mathbb{Z}$. Sa construction s'appuie sur une idée suggérée (très brièvement) par Berkovich dans son livre [Ber90]. Cette approche a l'avantage de proposer une notion d'espace analytique qui est naturellement un espace localement annelé. La présente thèse est une continuation des travaux de J. Poineau.

La géométrie analytique complexe est l'étude d'espaces localement annelés qui sont des recollements de sous-espaces analytiques d'ouverts de $\mathbb{C}^n$. Si l'on souhaite transposer cette définition dans le cas où l'anneau de base est $\mathbb{Z}$, il est donc indispensable d'avoir un analogue de l'espace localement annelé $(\mathbb{C}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n})$ (l'espace affine de dimension n). L'approche naïve consiste à remplacer $\mathbb{C}^n$ par l'ensemble $\overline{\mathbb{Z}}^n$ (où $\overline{\mathbb{Z}}$ est la fermeture intégrale de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{C}$) et le faisceau des fonctions analytiques complexes par le faisceau des fonctions localement développables en séries entières à coefficients entiers. Avec cette définition, des problèmes surviennent très rapidement, l'un des principaux étant le fait que l'espace topologique $\overline{\mathbb{Z}}^n$ est totalement discontinu. La totale discontinuité entraine que la fonction qui vaut 1 sur le disque fermé de centre 0 et de rayon π et 0 partout ailleurs fait partie des sections globales de ce faisceau, bien que ce ne soit pas une fonction que l'on souhaite considérer.

Un tel problème survient déjà lorsque l'on essaie de faire de la géométrie analytique sur $\mathbb{C}_p$ (la complétion d'une clôture algébrique de $\mathbb{Q}_p$). En effet cet ensemble étant lui aussi totalement discontinu, le faisceau des fonctions localement développables en séries entières est un faisceau beaucoup trop gros. John Tate a proposé (voir [Tat71]) une méthode pour pallier à cette difficulté. Il munit $\mathbb{C}_p^n$ non plus d'une vraie topologie mais d'une topologie de Grothendieck où il n'autorise que certains ouverts et certains recouvrements par des ouverts. Son approche semble difficilement transposable à notre situation étant donné qu'elle fait intervenir les bonnes propriétés des séries convergentes sur un corps non archimédien (par exemple le fait que tout les idéaux soient fermés et de type fini [1]). Dans les années 90, V. Berkovich (voir [Ber90]) a apporté une nouvelle réponse à la question : « Comment faire de la géométrie analytique sur un corps non archimédien ? »

Il définit l'ensemble sous-jacent à l'espace affine de dimension n (que l'on notera $\mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}$) comme l'ensemble des semi-normes multiplicatives sur $\mathbb{C}_p[T_1, \ldots, T_n]$ qui sont égales à la valeur absolue p-adique une fois restreintes à $\mathbb{C}_p$. Il munit cette ensemble de la topologie la moins fine rendant continue l'évaluation des polynômes. Il munit cet espace topologique du faisceau des fonctions qui sont localement des limites uniformes de fonctions rationnelles sans pôle.

Cette dernière méthode a un avantage par rapport à celle de Tate : elle donne naissance à de vrais espaces topologiques qui ont des propriétés remarquables, telles que la compacité locale, la connexité locale par arcs (voir la figure ci-dessous représentant la droite projective sur $\mathbb{C}_p$).

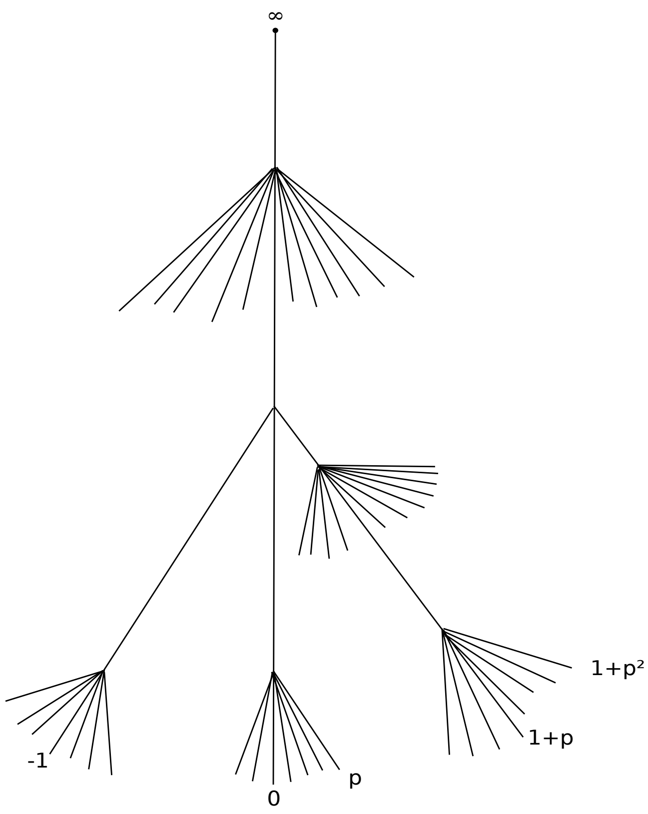

FIGURE 1 – Droite projective sur $\mathbb{C}_p$.

Signalons aussi l'existence de plusieurs autres théories permettant de faire de la géométrie analytique sur un corps non archimédien.

1. Ces propriétés sont par exemple montrées dans [BGR84].

Tout d'abord, il y a la construction M. Raynaud (voir [Ray74]) qui utilise les schémas formels au-dessus d'un anneau d'entiers d'un corps non archimédien, et qui permet entre autres de formaliser la relation entre un espace analytique et ses différentes réductions possibles.

Plus récemment, R.Huber (voir [HK94] et [Hub94]) a utilisé les valuations non nécessairement de hauteur 1 pour développer une autre théorie qui redonne essentiellement les points du topos associé à un espace analytique tel que l'a défini Tate. Cette dernière théorie intéresse actuellement une communauté très active, en raison de l'importance des « espaces perfectoïdes » introduits récemment par P. Scholze, qui sont des espaces de Huber particuliers (voir par exemple [Sch13]).

Le fait que les anneaux de base soient non archimédien est essentiel dans ses constructions. Ainsi, il y a peu d'espoir de développer une théorie des espaces analytiques sur $\mathbb{Z}$ en s'inspirant des approches de Raynaud et Huber.

Dans ce travail nous ne nous intéresserons qu'à l'approche de V. Berkovich car (comme il le fait remarquer lui même dans le premier chapitre de son livre [Ber90]) cette construction peut être faite au-dessus de n'importe quel anneau de Banach (et non plus seulement un corps non archimédien), et donc en particulier au-dessus de $\mathbb{Z}$ muni de sa norme usuelle. Il suffit pour cela d'affaiblir un peu la définition. Si $\mathcal{A}$ est un anneau de Banach, $\mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}$ sera l'ensemble des semi-normes multiplicatives sur $\mathcal{A}[T_1, \ldots, T_n]$ qui sont bornées par la norme de $\mathcal{A}$ une fois restreintes à $\mathcal{A}$. On peut alors, comme dans le cas d'un corps non archimédien, munir cet ensemble d'une topologie et d'un faisceau structural. V. Berkovich ne poussera pas plus loin l'étude de ces espaces analytiques au-dessus d'un anneau de Banach quelconque pour se concentrer sur le cas des espaces analytiques au-dessus d'un corps non archimedien. Dans ce cadre, sa théorie a déjà permis de nombreuses avancées significatives dans des domaines aussi variés que : le programme de Langlands Local, les systèmes dynamiques, la théorie de Hodge p-adique, *etc.*

J. Poineau a entrepris dans sa thèse (qui a été en grande partie retranscrite dans le livre [Poi10]) et ensuite dans l'article [Poi13], une étude des espaces affines tels que Berkovich les définit sur un anneau de Banach, en s'intéressant tout particulièrement au cas des anneaux d'entiers de corps de nombres (et donc en particulier $\mathbb{Z}$).

Il a étudié la topologie et les fonctions analytiques au voisinage de certains points de l'espace affine. Dans un premier temps cela nécessitait d'avoir une bonne compréhension du spectre analytique d'un anneau d'entiers de corps de nombres que l'on notera $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ pour $\mathcal{A}$ un anneau de Banach (voir la figure représentant $\mathcal{M}(\mathbb{Z})$). Dans le cas de la droite analytique au-dessus d'un anneau d'entiers de corps de nombres, il a décrit assez précisément l'ensemble sous-jacent, sa topologie et son faisceau structural. Citons deux résultats :

— la droite analytique sur un anneau d'entiers de corps de nombres est localement connexe par arcs ;

— le faisceau structural de la droite analytique sur un anneau d'entiers de corps de nombres est cohérent.

Il a ensuite montré que les couronnes de dimension 1 ouverte et fermée n'ont pas de cohomologie cohérente. Enfin tous ces résultats ont permis de trouver de nouvelles démonstrations (plus géométriques) de résultats sur les séries entières à coefficients dans un anneau d'entiers de corps de nombres. Il a notamment redémontré que tout groupe fini est groupe de Galois sur le corps des fractions de l'anneau constitué des séries entières à coefficients dans $\mathbb{Z}$ et convergeant sur un disque de rayon strictement inférieur à 1. [2]

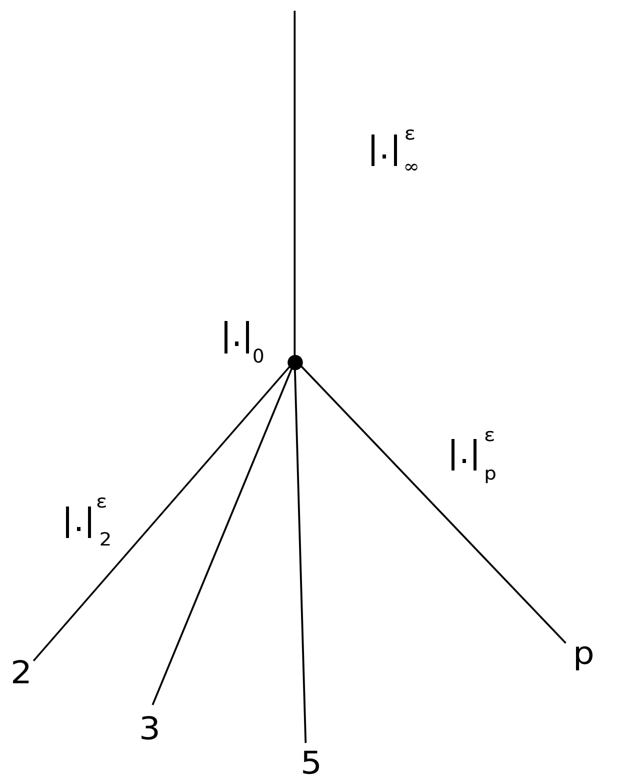

Figure 2 – Spectre analytique de $\mathbb{Z}$.

Ensuite, dans l'article [Poi13], il a obtenu un résultat de division de Weierstraß qui lui a permis de montrer la noethérianité des anneaux de germes de fonctions au voisinage des points des espaces affines et de calculer leurs dimensions. Il a fini par en déduire la cohérence de leur faisceau structural, ce qui généralise à toute dimension un fait qu'il avait obtenu sur la droite affine durant sa thèse. Il a mis notamment en évidence un certain nombre de conditions techniques sur l'anneau de Banach de base qui sont suffisantes pour obtenir ces résultats (ces conditions sont bien sûr toutes vérifiées par les anneaux d'entiers

2. Tous ces résultats peuvent être retrouvés dans le livre [Poi10].

de corps de nombres munis de la norme induite par le maximum des normes pour les différents plongements complexes).

Construction de la catégorie des espaces analytiques sur un anneau de Banach

Les résultats obtenus par J. Poineau (spécialement la cohérence du faisceau structural) sont un premier pas vers la possibilité d'une théorie des espaces analytiques sur un anneau d'entiers de corps de nombres. Nous nous sommes donc attelé à la construction d'une catégorie d'espaces $\mathcal{A}$-analytiques pour $\mathcal{A}$ un anneau de Banach satisfaisant certaines conditions techniques (satisfaites par les anneaux d'entiers de corps de nombres munis de leur norme usuelle). Pour pouvoir effectuer des raisonnements analogues à ceux des géométries analytiques « usuelles », nous aurons besoin que cette catégorie satisfasse certaines propriétés :

1. tous les objets doivent avoir une structure d'espace localement annelé ;
2. tous les morphismes doivent être des morphismes d'espaces localement annelés $\mathcal{A}$-linéaires (en un sens à préciser) ;
3. elle doit contenir les sous-espaces analytiques d'ouverts d'espaces affines au-dessus de $\mathcal{A}$ (tels que les a définis J. Poineau) ;
4. tout objet de cette catégorie doit pouvoir être obtenu comme recollement de tels espaces le long de morphismes de la catégorie ;
5. elle doit admettre des produits fibrés.

Cette liste de propriétés n'est pas exhaustive. Nous aurons, par exemple, besoin de la propriété suivante (toute aussi souhaitable que les autres pour avoir une théorie raisonnable) pour montrer l'existence du produit fibré :

Le morphisme fonctoriel en X :

$$\begin{array}{rccc} s: & \mathrm{Hom}(X, \mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}) & \to & \mathcal{O}_X(X)^n \\ & (\varphi, \varphi^{\#}) & \mapsto & (\varphi^{\#}(T_1), \dots, \varphi^{\#}(T_n)) \end{array}$$

où $T_1, \dots, T_n$ sont les fonctions coordonnées de $\mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}$, doit être un isomorphisme. De manière plus prosaïque, il faut que la donnée d'un morphisme allant d'un espace analytique dans un espace affine de dimension n équivaille à la donnée de n fonctions analytiques sur cet espace (ou plus précisément de n sections globales du faisceau structural).

Il est à noter que le fait que le morphisme de faisceau s soit un isomorphisme permet de construire un foncteur d'analytification de la catégorie des schémas de type fini sur un anneau d'entiers de corps de nombres vers la catégorie des espaces analytiques que nous avons construite. La définition de ce foncteur se fait au moyen d'une propriété universelle.

C'est dans l'objectif de faire en sorte que s soit un isomorphisme que nous allons construire notre définition de morphisme d'espaces analytiques. Pour chercher les propriétés les plus raisonnables à ajouter dans la définition de morphisme, nous allons nous inspirer de la démonstration du fait que s est un isomorphisme dans les situations qui nous servent de modèles, à savoir la géométrie analytique complexe et la géométrie analytique sur un corps non archimédien à la Berkovich.

Dans les deux exemples qui nous servent de guide, le point crucial est d'avoir une définition de morphisme qui entraine l'injectivité du morphisme s, ensuite la surjectivité se ramènera à un énoncé local plus élémentaire à montrer. Pour assurer l'injectivité de s, il faut donner une définition qui permet d'affirmer que pour tout morphisme d'espaces analytiques $\varphi : (X, \mathcal{O}_X) \to (\mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}, \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}})$ et tout point $x \in X$, le morphisme d'anneaux $\varphi^\# : \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}, \varphi(x)} \to \mathcal{O}_{X,x}$ est entièrement déterminé par l'image des fonctions coordonnées $T_1, \ldots, T_n$. Dans cette introduction, nous ne nous intéresserons qu'à la démonstration de ce point.

Le cas complexe : Dans le cas de la géométrie analytique complexe un morphisme d'espaces analytiques $f : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ est simplement défini comme un morphisme d'espaces localement annelés sans condition supplémentaire. Intéressons-nous maintenant à un morphisme d'espace analytique $\varphi : (X, \mathcal{O}_X) \to (\mathbb{C}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n})$. Soit $x \in X$. En travaillant un peu, on peut montrer que le morphisme $\varphi^\# : \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n, \varphi(x)} \to \mathcal{O}_{X,x}$ est entièrement déterminé par l'image d'une famille génératrice de l'idéal maximal de $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n, \varphi(x)}$ (voir lemme A.1 pour une démonstration complète). La démonstration de ce fait est exclusivement algébrique. Elle repose sur les deux faits suivants :

— les anneaux locaux $\mathcal{O}_{X,x}$ et $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n, \varphi(x)}$ sont noethériens,

— x est un $\mathbb{C}$-point,

et sur le Théorème d'Artin-Rees. Enfin, on remarque que l'idéal maximal de $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n, \varphi(x)}$ possède une famille de générateurs constitué de n polynômes de degré 1. Leurs images sont donc déterminées par l'image des fonctions coordonnées.

Dans cette démonstration l'ingrédient qui va nous faire défaut est le fait que, contrairement au cas complexe, un corps non archimédien possède toujours des extensions valuées non triviales. En particulier, pour tout x le corps résiduel $\kappa(x)$ est en général trop gros et il n'y aucune raison pour qu'il se plonge dans $\mathcal{O}_{X,x}$. Il semble donc difficile d'utiliser cette définition.

Le cas des espaces de Berkovich sur un corps non archimédien k : La définition d'un morphisme entre (bons) espaces analytiques (sans bord) telle que la propose Berkovich dans le livre [Ber90] est un peu plus élaborée que celle des morphismes d'espaces analytiques complexes. Pour éviter de rendre cet exposé trop technique nous ne donnerons que le minimum de détails sur cette construction.

Soient $(X, \mathcal{O}_X)$ un sous-espace analytique d'ouvert U de l'espace affine $\mathbb{A}^n_k$ au sens de Berkovich et $x \in X$. L'algèbre $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_k, x}$ peut être écrite comme une limite inductive d'algèbres de Banach $\mathcal{B}(V)$ qui sont en quelque sorte des algèbres de fonctions analytiques sur un voisinage compact V de x dans U. Si l'on choisit V convenablement tout idéal I de $\mathcal{B}(V)$ est un idéal fermé. En particulier, $\mathcal{B}(V)/I$ hérite d'une structure d'algèbre de Banach. Si l'on choisit I de telle sorte qu'il corresponde à l'idéal I_X de définition de X en x, on obtient une écriture de $\mathcal{O}_{X,x} := \mathrm{colim}_{V \in \mathcal{V}_x} \mathcal{B}(V)/I_X$ comme limite inductive d'algèbres de Banach où $\mathcal{V}_x$ est un ensemble de voisinages compacts de x dans $\mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}$. L'algèbre de Banach $\mathcal{B}(V)/I_X$ ne dépend que de la trace de V sur X. Quitte à changer un peu les notations, on peut donc écrire $\mathcal{O}_{X,x}$ comme une limite inductive d'algèbres de Banach $\mathcal{A}_V$ où V appartient à un ensemble $\mathcal{V}_x$ de voisinages compacts de x dans X.

Un morphisme entre (bons) espaces analytiques (sans bord) $\varphi : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ est un morphisme d'espaces localement annelés qui vérifie une propriété supplémentaire. Pour tout $x \in X$, on peut écrire $\mathcal{O}_{X,x} = \operatorname{colim}_{V \in \mathcal{V}_x} \mathcal{A}_V$ et $\mathcal{O}_{Y,\varphi(x)} = \operatorname{colim}_{W \in \mathcal{W}_{\varphi(x)}} \mathcal{B}_W$. La propriété que nous requérons pour les morphismes d'espaces analytiques implique que pour tout $W \in \mathcal{W}_{\varphi(x)}$, le morphisme $\varphi^\# : \mathcal{B}_W \to \mathcal{O}_{X,x}$ se factorise en un morphisme <u>borné</u> d'algèbres de Banach $\varphi^\# : \mathcal{B}_W \to \mathcal{A}_V$ pour un certain voisinage $V \in \mathcal{V}_x$.

Maintenant considérons un morphisme d'espaces analytiques $\varphi : (X, \mathcal{O}_X) \to (\mathbb{A}^m_k, \mathcal{O}_{\mathbb{A}^m_k})$ et x un point de X. Dans l'écriture $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^m_k,\varphi(x)} = \operatorname{colim}_{W \in \mathcal{W}_{\varphi(x)}} \mathcal{B}(W)$, pour tout $W \in \mathcal{W}_{\varphi(x)}$, on peut choisir $\mathcal{W}_{\varphi(x)}$ de tel sorte que l'ensemble des fonctions rationnelles sans pôle sur W soit dense dans $\mathcal{B}(W)$. Ainsi pour tout $W \in \mathcal{W}_{\varphi(x)}$, le morphisme borné d'algèbres de Banach $\varphi^\# : \mathcal{B}(W) \to \mathcal{A}_V$ est entièrement déterminé par l'image des fonctions rationnelles et donc par l'image des fonctions coordonnées. On conclut alors qu'il en est de même de $\varphi^\# : \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_k,\varphi(x)} \to \mathcal{O}_{X,x}$ puisque l'algèbre de gauche est une limite inductive de $\mathcal{B}(W)$.

Cette définition, bien que plus technique, semble être plus adaptée à notre cadre. Nous avons donc choisi de nous appuyer principalement sur cette construction.

Nous nous plaçons donc dans l'optique de nous tenir au plus près de la construction faite dans les espaces de Berkovich sur un corps non archimédien.

Soit X un sous-espace analytique d'un ouvert U d'un espace affine $\mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}$ au-dessus d'un corps non archimédien et x un point de X. De la même manière qu'en non archimédien, nous pouvons définir les algèbres $\mathcal{B}(V)$ où V parcourt un certain type de voisinages compacts de x dans $\mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}$. Malheureusement, il nous est impossible d'affirmer que les idéaux de $\mathcal{B}(V)$ sont fermés. Il nous est cependant possible de contourner ce problème en montrant un énoncé analogue local. C'est une généralisation du Théorème 6.6.19 de [Poi10] qui jouera ce rôle. Ce résultat peut être formulé de la manière suivante :

« Pour toute suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uniformément convergente au voisinage d'un point x d'un espace affine $\mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}$, telle que la suite de germes correspondante $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_{\mathcal{A}},x}$ est incluse dans un idéal, sa limite f induit un germe qui appartient lui aussi à cet idéal. »

La démonstration de ce résultat est longue. Il nous faudra dans un premier temps reprendre la démonstration du théorème de division de Weierstraß de J. Poineau (voir [Poi13]) pour établir une version de cet énoncé avec un contrôle sur la norme du reste et du quotient. Puis utiliser ce nouveau résultat pour en déduire l'énoncé de fermeture à l'aide d'une récurence sur la dimension. [3]

3. Nous avons besoin de cet énoncé pour définir une catégorie raisonnable d'espaces analytiques, mais nous espérons qu'il pourra aussi être utile plus tard pour développer une théorie des espaces de Stein tel que l'on peut la trouver dans [GR09] ou dans [GR04].

Avec ces outils à notre disposition, nous pouvons proposer une définition de morphisme d'espaces analytiques (dans le cas des sous-espaces d'ouverts d'espaces affines, le cas général en découlera par recollement).

Commençons par un cas particulier. Soit U et V deux ouverts d'espaces affines. Un **morphisme d'espaces analytiques** allant de U dans V est un morphisme d'espaces localement annelés $(\varphi, \varphi^{\#}) : (U, \mathcal{O}_U) \to (V, \mathcal{O}_V)$ tel que pour tout $x \in U$ et tout voisinage compact V' de $\varphi(x)$ vers V, il existe un voisinage compact U' de x dans U tel que $\varphi(U')$ soit inclus dans V' et le morphisme $\varphi^{\#} : \mathcal{O}_V(V') \to \mathcal{O}_U(U')$ soit borné pour la norme uniforme sur la source et sur le but.

Nous pouvons maintenant considérer le cas de deux sous-espace analytiques d'ouverts d'espaces affines. Soient $(X, \mathcal{O}_X)$ et $(Y, \mathcal{O}_Y)$ deux sous-espaces analytiques respectivement de deux ouverts d'espaces affines $U \subset \mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}$ et $V \subset \mathbb{A}^{n'}_{\mathcal{A}}$. On note $(j, j^{\#}) : (Y, \mathcal{O}_Y) \to (V, \mathcal{O}_V)$ le morphisme d'espaces annelés induit par l'inclusion de Y dans V. Un **morphisme d'espaces analytiques** $(\varphi, \varphi^{\#}) : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ est un morphisme d'espaces localement annelés satisfaisant tel que $(j \circ \varphi, (j \circ \varphi)^{\#}) : (X, \mathcal{O}_X) \to (V, \mathcal{O}_V)$ vérifit la condition suivante : pour tout $x \in X$, il existe un voisinage ouvert U' de x dans U et un morphisme entre ouverts d'espaces affines $(\tilde{\varphi}, \tilde{\varphi}^{\#}) : (U', \mathcal{O}_{U'}) \to (V, \mathcal{O}_V)$ faisant commuter le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
(U', \mathcal{O}_{U'}) \arrow[r, "(\tilde{\varphi},\tilde{\varphi}^{\#})"] & (V, \mathcal{O}_V) \\
(X \cap U', \mathcal{O}_{X\cap U'}) \arrow[u, hook] \arrow[ur, "(\varphi,\varphi^{\#})"] &
\end{tikzcd} .$$

Avec cette définition (un peu technique) [4] de morphisme d'espaces analytiques et grâce au théorème de fermeture des idéaux dont nous avons parlé plus tôt, nous pouvons alors montrer que le morphisme s est un isomorphisme de la même manière que dans le cas des espaces analytiques sur un corps non archimédien.

Connexité locale des espaces de Berkovich sur un anneau d'entiers de corps de nombres

Dans la second partie de cette thèse, nous montrerons que l'espace topologique sous-jacent à tout espace analytique sur un anneau d'entiers de corps de nombres (au sens où nous les avons définis dans la première partie) est localement connexe par arcs.

Nous commencerons par montrer le cas des espaces affines. Cet énoncé, élémentaire dans le cas où l'anneau de Banach de base est le corps des complexes (dans ce cas les espaces affines ne sont autres que les espaces topologiques $\mathbb{C}^n$), est tout à fait non trivial, au-dessus d'un corps non archimédien. Nous nous sommes inspiré de la preuve de Berkovich.

La démonstration s'articule de la manière suivante.

4. Il est à remarquer que cette propriété que nous requérons pour les morphismes d'espaces analytiques est vérifiée par les morphismes d'espaces analytiques complexes (voir par exemple la remarque 1.3.1 de [GR84]).

Soient $\mathbf{s} := (s_1, \dots, s_n)$ et $\mathbf{t} := (t_1, \dots, t_n)$ des n-uplets de réels positifs. On pose

$$D_U(\mathbf{s}, \mathbf{t}) := \{x \in \mathbb{A}^n_{\mathcal{A}} | \forall i \in [\![1, n]\!], s_i < |T_i(x)| < t_i \text{ et } \pi(x) \in U\}$$

et

$$D_U(\mathbf{t}) := \{x \in \mathbb{A}^n_{\mathcal{A}} | \forall i \in [\![1, n]\!], |T_i(x)| < t_i \text{ et } \pi(x) \in U\}$$

avec π la projection naturelle de $\mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}$ vers $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ et U un sous-ensemble de $\mathcal{M}(\mathcal{A})$.

On commence par remarquer que si U est un ensemble connexe par arcs, les ensembles $D_U(\mathbf{t})$ et $D_U(\mathbf{s}, \mathbf{t})$ sont eux aussi connexe par arcs. Nous montrerons même que ces espaces vérifient une propriété plus forte que nous nommerons élasticité. [5]

Ensuite, nous remarquerons que tout point de $\mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}$ possède une base de voisinages dont chacun des éléments est naturellement muni d'un morphisme vers un ensemble $D_U(\mathbf{t})$ ou $D_U(\mathbf{s}, \mathbf{t})$. Nous montrerons que ce morphisme est une application finie (c'est-à-dire fermée et à fibres finies) et ouverte.

Enfin nous déduirons que chaque point admet une base de voisinage connexe par arcs à l'aide du résultat de topologie générale suivant : si l'on a une application continue entre espaces topologiques $\varphi : X \to Y$ finie et ouverte avec Y un espace élastique, alors X n'a qu'un nombre fini de composantes connexes qui sont connexes par arcs.

Donnons quelques précisions sur la démonstration.

— La démonstration du fait que $D_U(\mathbf{t})$ et $D_U(\mathbf{s}, \mathbf{t})$ sont élastiques si U est connexe par arcs utilisera de manière fondamentale l'existence d'une section continue aux projections $\pi : D_U(\mathbf{s}, \mathbf{t}) \to U$ et $\pi : D_U(\mathbf{t}) \to U$. Pour être sûr d'avoir une telle section, nous devrons nous restreindre au cas où $\mathcal{A}$ est un anneau d'entiers de corps de nombres, et utiliser le fait que dans ce cas $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ possède une topologie très simple (voir par exemple le cas de $\mathcal{M}(\mathbb{Z})$ qui est essentiellement le cas générique).

— Nous aurons recours à un critère de finitude et d'ouverture des morphismes, faisant intervenir les faisceaux cohérents. Ainsi, nous entreprendrons un travail de démonstration d'énoncés qui sont des analogues de résultats classiques de la géométrie analytique complexe (et sur un corps non archimédien) concernant ces faisceaux. Nous devrons, par exemple, vérifier que le foncteur d'image directe associé à un morphisme d'espaces analytiques, qui est fini en tant qu'application continue, respecte les faisceaux cohérents. Ce fait nous permettra d'obtenir un critère de finitude. Il nous faudra ensuite trouver un moyen de d'affirmer que les morphismes considérés sont ouverts. Pour cela, nous montrerons qu'ils sont plats au sens où les morphismes entre anneaux locaux sont des morphismes plats d'anneaux. Ce qui impliquera qu'il est ouvert grâce à un résultat du type Nullstallensatz de Rückert. Intuitivement, ce dernier résultat peut se formuler de la façon suivante : une

5. Un espace topologique X sera dit élastique s'il est non vide, séparé et connexe par arcs et si de plus, pour tout couple de points $(x, y) \in X^2$, il existe un chemin $\ell_{x,y}$ reliant x à y tel que pour tout voisinage U de $\ell_{x,y}$ dans X, il existe un voisinage V de x dans X tel que tout point de V puisse être relié à y par un chemin inclus dans U.

Intuitivement cela signifie que si x' est suffisamment proche de x, il existe un chemin reliant x' à y suffisamment proche de $\ell_{x,y}$.

section nulle ponctuellement au voisinage d'un point d'un espace analytique est nilpotente. [6]

Dans un deuxième temps, nous en déduirons que tout espace analytique est localement connexe par arcs. Les méthodes utilisées dans le cas des espaces de Berkovich sur un corps non archimédien, de par la définition même des espaces, semblent être les plus adaptées. Cependant, il semble illusoire pour le moment d'espérer montrer des théorèmes globaux, tels que le théorème de normalisation de Noether. Il faut alors se tourner vers la géométrie analytique complexe pour trouver les énoncés locaux correspondants qui semblent beaucoup plus accessibles. Dans ce cas-ci, nous nous heurtons à un autre type de problème : en géométrie analytique, complexe dans les raisonnements locaux au voisinage d'un point x, on peut toujours se ramener au cas où x est le point 0 via une translation (qui est un isomorphisme). Dans notre cas il est impossible de faire de telle réduction, puisqu'il existe des points dont le corps résiduel correspondant est une extension transcendante du corps de base. Et même si dans le cas où les points considérés ont un corps résiduel qui est une extension finie du corps de base, nous possédons un analogue d'une translation ce morphisme n'est pas un isomorphisme.

Nous devrons donc utiliser les mêmes méthodes que dans la partie précédente pour justifier que ce morphisme est fini et ouvert, ce qui nous permettra, via le même argument topologique, de nous ramener à un cas plus simple. Enfin nous montrerons un résultat s'apparentant à la normalisation de Noether locale qui permet de construire un morphisme fini, ouvert, allant d'un voisinage d'un point d'un espace analytique vers un ouvert d'un espace affine, et ainsi en déduire la connexité locale de ces derniers.

Signalons que ce résultat de connexité est extrêmement important pour passer de raisonnements locaux à des raisonnements globaux. Pour avoir une théorie (co)homologie agréable, il serait même souhaitable d'avoir la locale contractibilité, et la finitude du type d'homotopie globale. Tout cela apparaît pour le moment hors de portée. Cependant, les méthodes de Hrushovski et Loeser (voir [HL10]) semblent être assez uniformes pour traiter toute la partie non archimédienne simultanément, il resterait, malgré tout, la partie archimédienne.

Nous terminerons cette thèse avec la définition d'une notion de dimension d'espace analytique sur un anneau d'entiers de corps de nombres. Encore une fois la définition utilise de manière essentielle la structure topologique simple de $\mathcal{M}(\mathcal{A})$. Puis, nous comparerons cette notion de dimension avec celle des schémas dans le cas où l'espace analytique est l'analytifié d'un schéma. Pour cela nous établirons quelques propriétés du foncteur d'analytification. Nous prouverons aussi que pour tout schéma de type fini X, le morphisme naturel d'espace localement annelé $X^{an} \to X$ est un morphisme plat.

Il serait extrêmement souhaitable de continuer l'étude des relations entre propriétés des schémas et propriétés de leur analytification avec notamment la démonstration d'un

6. Il facile de remarquer que tout élément nilpotent est nul en tout point. Ce résultat en est une réciproque.

analogue d'un théorème GAGA. Pour cela, il faudra montrer la stabilité des faisceaux cohérents par image directe supérieur de morphisme propre.

Chapitre 1

Quelques fondamentaux de la géométrie analytique sur un anneau de Banach

Dans ce chapitre nous allons introduire le cadre que nous allons étudier durant tout le reste de cette thèse. Nous allons, dans un premier temps, définir la notion d'espaces affines sur un anneau de Banach. Ces objets vont nous permettre de construire les blocs de base de la théorie. Puis nous introduirons des outils très utiles pour l'étude de ces derniers. Enfin nous rappellerons quelques résultats d'analyse sur ces espaces qui ont été obtenus par J. Poineau dans [Poi13].

1.1 Rappels de construction générale

Soit $(\mathcal{A}, \|.\|_{\mathcal{A}})$ une algèbre de Banach. On définit $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ comme l'ensemble des semi-normes $|.|$ multiplicatives sur $\mathcal{A}$ bornées par $\|.\|_{\mathcal{A}}$ *i.e.* pour tout $a \in \mathcal{A}$, $|a| \leq \|a\|_{\mathcal{A}}$. Cet ensemble est muni de la topologie la moins fine rendant continue l'évaluation :

$$\begin{array}{rccc} a : & \mathcal{M}(\mathcal{A}) & \to & \mathbb{R} \\ & |.| & \mapsto & |a| \end{array}$$

pour tout $a \in \mathcal{A}$. On sait, d'après le théorème 1.2.1 de [Ber90], que si $\mathcal{A}$ est non nul, cet ensemble est non vide et compact. Pour tout $b \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$ on note $\mathrm{Ker}(b)$ le noyau de la semi-norme. C'est un idéal premier puisque b est multiplicative. L'anneau $\mathcal{A}/\mathrm{Ker}(b)$ est naturellement muni de la norme quotient associée à b. Comme la norme sur $\mathcal{A}/\mathrm{Ker}(b)$ ainsi obtenue est multiplicative, elle s'étend au corps de fractions $cf(\mathcal{A}/\mathrm{Ker}(b))$. On notera $\mathscr{H}(b)$ le complété de $cf(\mathcal{A}/\mathrm{Ker}(b))$ pour cette norme.

On note $\|.\|_{sp}$ la semi-norme spectrale qui à un élément a de $\mathcal{A}$ associe $\sup_{x \in \mathcal{M}(\mathcal{A})} |a(x)|$. Nous dirons qu'une algèbre de Banach est uniforme si la semi-norme $\|.\|_{sp}$ est équivalente à la norme de $\mathcal{A}$. Remarquons que cela implique en particulier que $\mathcal{A}$ est une algèbre réduite.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On définit l'espace affine de dimension n sur $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ de la façon suivante. C'est l'ensemble des semi-normes multiplicatives sur $\mathcal{A}[T_1, \dots, T_n]$ dont la restriction à $\mathcal{A}$ est bornée par $\|.\|_{\mathcal{A}}$. On notera $\mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}$ cet ensemble. On le munit de la topologie la moins fine rendant continue l'évalution :

$$\begin{array}{rccc} P: & \mathbb{A}^n_{\mathcal{A}} & \to & \mathbb{R} \\ & |.| & \mapsto & |P| \end{array}$$

pour tout $P \in \mathcal{A}[T_1, \dots, T_n]$. À tout $x \in \mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}$ on peut associer de la même manière que ci-dessus, le corps $\mathscr{H}(x)$. L'espace topologique $\mathbb{A}^0_{\mathcal{A}}$ s'identifie naturellement avec $\mathcal{M}(\mathcal{A})$. Soit $x \in \mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}$ une semi-norme multiplicative et $P \in \mathcal{A}[T_1, \dots, T_n]$ un polynôme, on notera souvent $|P(x)|$ ou $|P|_x$ au lieu de $x(P)$ l'évaluation de P en x. La notation $|P(x)|$ est justifée par le fait que l'on note $P(x)$ l'image de P dans $\mathscr{H}(x)$ par le morphisme naturel.

Soit U un sous-ensemble de $\mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}$. On note S_U l'ensemble des éléments $P \in \mathcal{A}[T_1, \dots, T_n]$ tel que $|P(x)| \neq 0$ pour tout x appartenant à U.

Pour tout $U \subset \mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}$ compact, on peut munir $S_U^{-1}\mathcal{A}[T_1, \dots, T_n]$ d'une semi-norme qui à $f \in S_U^{-1}\mathcal{A}[T_1, \dots, T_n]$ associe $\sup_{x \in U} |f(x)|$ (cette semi-norme est bien définie grâce au fait que U est compact). On peut maintenant munir l'espace topologique $\mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}$ d'un faisceau. Soit U un ouvert de $\mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}$, $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}}(U)$ est l'ensemble des applications $f : U \to \coprod_{x \in U} \mathscr{H}(x)$ telles que :

- pour tout $x \in U$, $f(x)$ appartient à $\mathscr{H}(x)$,
- pour tout $x \in U$, il existe V voisinage compact de x dans U tel que f restreinte à V soit une limite d'élément de $S_V^{-1}\mathcal{A}[T_1, \dots, T_n]$ pour la norme $\|.\|_V$.

Nous avons ainsi construit un espace localement annelé $(\mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}, \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}})$. Soit $x \in \mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}$. on note m_x l'idéal maximal de $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_{\mathcal{A}},x}$ (constitué des fonctions $f \in \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_{\mathcal{A}},x}$ telles que $|f(x)| = 0$) et $\kappa(x) := \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_{\mathcal{A}},x}/m_x$. Le corps $\kappa(x)$ hérite de la valeur absolue de $\mathscr{H}(x)$. Par construction, le sous-corps $\kappa(x)$ est dense dans $\mathscr{H}(x)$.

Soient U un ouvert de $\mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}$ et $f \in \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}}(U)$. L'évaluation en norme $|f| : U \to \mathbb{R}^*_+$ est une fonction continue. Ce fait ce démontre grâce à la définition de la topologie et la densité des fonctions rationnelles dans l'ensemble des fonctions analytiques.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe une application naturelle $\pi : \mathbb{A}^n_{\mathcal{A}} \to \mathcal{M}(\mathcal{A})$ qui à toute semi-norme sur $\mathcal{A}[T_1, \dots, T_n]$ associe sa restriction à $\mathcal{A}$. Ainsi $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ peut être vu comme la base de ces espaces. On la notera régulièrement B. De manière plus générale, pour tout espace affine $\mathbb{A}^{n'}_{\mathcal{A}}$ avec $n' \leq n$ il existe une projection $p_{n,n'} : \mathbb{A}^n_{\mathcal{A}} \to \mathbb{A}^{n'}_{\mathcal{A}}$ qui à une semi-norme associe sa restriction au polynôme en les n' premières variables. Ces deux applications sont continues et ouvertes (pour le caractère ouvert voir le corollaire 6.8 de [Poi13]).

Nous verrons plus tard (dans l'exemple 2.4) que ces applications sont en fait sous-jacentes à des morphismes d'espaces localement annelés qui seront des morphismes d'espaces analytiques.

Soit n un entier positif et $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un morphisme d'algèbres de Banach. Remarquons que ce morphisme induit un morphisme $\mathcal{A}[T_1, \dots, T_n] \to \mathcal{B}[T_1, \dots, T_n]$. Ce dernier étant borné une fois restreint à $\mathcal{A}$, il induit donc une application $\mathbb{A}^n_{\mathcal{B}} \to \mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}$. En utilisant, une fois de plus, le fait que φ est borné, on déduit que l'application $\mathbb{A}^n_{\mathcal{B}} \to \mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}$ est continue et est sous-jacente à un morphisme d'espaces localement annelés.

Ainsi la construction des espaces affines est fonctorielle en $\mathcal{A}$.

Soit x et y deux réels positifs. Nous noterons $x \prec y$ si $x < y$ ou si $x = 0$.

Soient $P \in \mathcal{A}[T]$ un polynôme, s et t deux réels positifs tel que l'on ait l'inégalité $s \leq t$ et U un sous-ensemble de $\mathcal{M}(\mathcal{A})$. On introduit les notations suivantes :

$$\begin{array}{rcl}
\overline{D}_U(P; s, t) & := & \{x \in \mathbb{A}^1_{\mathcal{A}} | \pi(x) \in U, \ s \leq |P(x)| \leq t\} \\
\overline{D}_U(P; t) & := & \overline{D}_U(P; 0, t) \\
\overline{D}_U(s, t) & := & \overline{D}_U(T; s, t) \\
\overline{D}_U(t) & := & \overline{D}_U(0, t) \\
D_U(P; s, t) & := & \{x \in \mathbb{A}^1_{\mathcal{A}} | \pi(x) \in U, \ s \prec |P(x)| < t\} \\
D_U(P; t) & := & D_U(P; 0, t) \\
D_U(s, t) & := & D_U(T; s, t) \\
D_U(t) & := & D_U(0, t).
\end{array}$$

1.2 Notions utiles sur les espaces de Berkovich

Rappelons maintenant quelques notions sur les espaces analytiques qui nous seront fréquemment utiles.

Soit V une partie compacte d'un espace affine $\mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}$. On note $\mathcal{B}(V)$ le complété séparé de $S_V^{-1}\mathcal{A}[T_1, \ldots, T_n]$ pour la norme uniforme $\|.\|_V$ que nous avons définie plus haut. Il est à noter que si $V = \{x\}$ avec $x \in \mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}$, $\mathcal{B}(V)$ n'est autre que $\mathscr{H}(x)$.

Remarquons de plus que par définition l'algèbre de Banach $\mathcal{B}(V)$ est une algèbre de Banach uniforme. En effet, par définition la norme spectrale de $\mathcal{B}(V)$ est inférieure à $\|.\|_V$. De plus, tout point de V induit une semi-norme sur $\mathcal{B}(V)$. La norme spectrale est donc supérieure ou égale au maximum des semi-normes appartenant à V qui est égal à $\|.\|_V$.

Soient $x \in \mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}$, $f \in \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_{\mathcal{A}},x}$ et V un voisinage compact de x. Nous dirons que f est **$\mathcal{B}$-défini** sur V s'il appartient à l'image de $\mathcal{B}(V)$ dans $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_{\mathcal{A}},x}$.

Il y a un morphisme naturel d'espaces annelés $\varphi : \mathcal{M}(\mathcal{B}(V)) \to \mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}$. Nous dirons que V est **spectralement convexe** si cette application induit un homéomorphisme entre $\mathcal{M}(\mathcal{B}(V))$ et V et si de plus le morphisme $\varphi : \varphi^{-1}(\mathring{V}) \to \mathring{V}$ est un isomorphisme d'espaces annelés où $\mathring{V}$ est l'intérieur topologique de V dans $\mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}$.

Proposition 1.1. *Une partie compacte V de $\mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}$ est spectralement convexe si et seulement si l'image du morphisme $\varphi : \mathcal{M}(\mathcal{B}(V)) \to \mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}$ est incluse dans V.*

C'est exactement la remarque 1.2.13 de [Poi10].

Corollaire 1.2. *Soient V et W deux sous-ensembles spectralement convexes de $\mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}$. L'ensemble compact $V \cap W$ est spectralement convexe.*

Démonstration du corollaire. Il suffit de montrer que le morphisme $\mathcal{M}(\mathcal{B}(V\cap W)) \to \mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}$ se factorise par $V\cap W$. Cela découle des deux diagrammes commutatifs suivants :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{M}(\mathcal{B}(V\cap W)) \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{A}^n_{\mathcal{A}} \\ \mathcal{M}(\mathcal{B}(V)) \simeq V \arrow[ur] & \end{tikzcd}, \quad \begin{tikzcd} \mathcal{M}(\mathcal{B}(V\cap W)) \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{A}^n_{\mathcal{A}} \\ \mathcal{M}(\mathcal{B}(W)) \simeq W \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

□

Exemples 1.3.

— *Toute partie V compacte et rationnelle, c'est-à-dire de la forme*

$$\bigcap_{1\le i\le p} \{x\in \mathbb{A}^n_{\mathcal{A}} |\ |P_i(x)| \le r_i|P_0(x)|\}$$

avec $r_i \in \mathbb{R}^+_*$ et $P_0, P_1, \ldots, P_p \in \mathcal{A}[T_1,\ldots,T_n]$ ne s'annulant pas simultanément, est spectralement convexe (voir Théorème 1.2.11 de [Poi10]).

Cela implique que tout point admet une base de voisinages compacts et spectralement convexes. En effet, par définition de la topologie, tout point $x \in \mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}$ admet une base de voisinage de la forme $\bigcap\limits_{1\le i\le p} \{x \in \mathbb{A}^n_{\mathcal{A}} | r_i \le |P_i(x)| \le s_i\}$ avec $r_i, s_i \in \mathbb{R}^+_*$ et $P_1,\ldots,P_p \in \mathcal{A}[T_1,\ldots,T_n]$. Il suffit de montrer que ces ensembles sont bien rationnels. Pour cela, montrons que les ensembles rationnels sont stables par intersection et que les ensembles de la forme $\{x \in \mathbb{A}^n_{\mathcal{A}} | r \le |P(x)| \le s\}$ sont rationnels.

Commençons par le premier point. Soient $U := \bigcap\limits_{1\le i\le p} \{x \in \mathbb{A}^n_{\mathcal{A}} ||P_i(x)| \le r_i|P_0(x)|\}$ et $V := \bigcap\limits_{1\le j\le p'} \{x \in \mathbb{A}^n_{\mathcal{A}} ||P'_j(x)| \le r'_j|P'_0(x)|\}$ deux ensembles compacts rationnels. On pose $r_0 := 1$, $r'_0 := 1$. On pose aussi

$$W := \bigcap_{0\le i\le p, 0\le j\le p'} \{x \in \mathbb{A}^n_{\mathcal{A}} |\ |(P_iP'_j)(x)| \le (r_ir'_j)|(P_0P'_0)(x)|\}.$$

Nous avons l'égalité $U\cap V = W$. En effet, clairement, $U\cap V$ est inclus dans W. Pour l'autre inclusion, soit x appartenant à W. Puisque les $(P_iP'_j)$ ne s'annulent pas simultanément, nous avons $|(P_0P'_0)(x)| > 0$ et donc $|P_0(x)| > 0$ et $|P'_0(x)| > 0$. Ainsi l'inégalité $|(P_iP'_0)(x)| \le r_i|(P_0P'_0)(x)|$ implique l'inégalité $|P_i(x)| \le r_i|P_0(x)|$. De même nous obtenons l'inégalité $|P'_i(x)| \le r'_i|P'_0(x)|$ et donc W et $V\cap U$ sont égaux.

Montrons enfin que les ensembles de la forme $\{x \in \mathbb{A}^n_{\mathcal{A}} | r \le |P(x)| \le s\}$ sont rationnels. Pour cela il suffit de constater que l'on a l'égalité

$$\{x \in \mathbb{A}^n_{\mathcal{A}} | r \le |P(x)| \le s\} = \{x \in \mathbb{A}^n_{\mathcal{A}} ||P(x)| \le s\} \cap \{x \in \mathbb{A}^n_{\mathcal{A}} | r \le |P(x)|\}$$

et que les deux ensembles de l'intersection sont rationnels.

— *Donnons un exemple de compact non spectralement convexe. Soient $p \in \mathbb{Z}$ un nombre premier et $\varepsilon \in]1, +\infty[$. On note $|\cdot|_{p,\varepsilon}$ la norme sur $\mathbb{Z}$ qui à $z \in \mathbb{Z}$ as-*

socie $\varepsilon^{-v_p(z)}$, où $v_p(\cdot)$ est la valuation p-adique. Il est important d'avoir à l'esprit que pour tout $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2 \in]1, +\infty[$, $|\cdot|_{p,\varepsilon_1}$ et $|\cdot|_{p,\varepsilon_2}$ ne sont pas équivalentes mais définissent la même topologie que nous appellerons topologie p-adique.
On note V le sous-ensemble de $\mathcal{M}(\mathbb{Z})$ formé des semi-normes $|\cdot|_{p,\varepsilon_1}$ et $|\cdot|_{p,\varepsilon_2}$. On peut montrer que $\mathcal{B}(V)$ est égale à l'algèbre $\mathbb{Q}_p$ munie de la norme $\max(|\cdot|_{p,\varepsilon_1}, |\cdot|_{p,\varepsilon_2})$. Ainsi $\mathcal{M}(\mathcal{B}(V))$ est égale à l'ensemble des semi-normes $|\cdot|_{p,\varepsilon}$ telles que ε appartient à $[\varepsilon_1, \varepsilon_2]$. Ainsi V n'est pas spectralement convexe.

Lemme 1.4. *Soient $\mathcal{B}$ une $\mathcal{A}$-algèbre de Banach uniforme, n un entier, V un sous-ensemble compact de $\mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}$ et $f : \mathcal{A}[T_1, \ldots, T_n] \to \mathcal{B}$ un morphisme de $\mathcal{A}$-algèbres. Si le morphisme d'espace topologique correspondant $\tilde{f} : \mathcal{M}(\mathcal{B}) \to \mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}$ se factorise par V, le morphisme f se factorise de manière unique par un morphisme borné d'algèbres de Banach $\mathcal{B}(V) \to \mathcal{B}$.*

Démonstration du lemme. Commençons par montrer que si un polynôme P appartient à $S_V \subset \mathcal{A}[T_1, \ldots, T_n]$ alors $f(P)$ est inversible dans $\mathcal{B}$. Soit x un élément de $\mathcal{M}(\mathcal{B})$. Par hypothèse $\tilde{f}(x)$ appartient à V. Ainsi le réel $|f(P)(x)| = |P(\tilde{f}(x))|$ est non nul. Grâce au Théorème 1.2.1 de [Ber90] cela implique que $f(P)$ n'appartient à aucun idéal maximal, il est donc inversible dans $\mathcal{B}$.

Le morphisme f s'étend donc, de manière unique, à $S_V^{-1}\mathcal{A}[T_1, \ldots, T_n]$. Il suffit maintenant de montrer que pour tout $P/Q \in S_V^{-1}\mathcal{A}[T_1, \ldots, T_n]$, $\|P/Q\|_V$ est supérieur ou égal à $\|f(P/Q)\|_{\mathcal{B}}$. Puisque $\mathcal{B}$ est uniforme il suffit de montrer que pour tout $x \in \mathcal{M}(\mathcal{B})$, l'inégalité $\|P/Q\|_V \geq |f(P/Q)(x)|$. Or c'est encore une conséquence du fait que $\mathcal{M}(\mathcal{B}) \to \mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}$ se factorise par V.

Ainsi le morphisme $S_V^{-1}\mathcal{A}[T_1, \ldots, T_n] \to \mathcal{B}$ s'étend, de manière unique, au complété $\mathcal{B}(V)$ de l'algèbre $S_V^{-1}\mathcal{A}[T_1, \ldots, T_n]$ pour la norme $\|\cdot\|_V$. □

À l'aide de ce lemme nous pouvons maintenant donner une autre caractérisation des parties spectralement convexes.

Proposition 1.5. *Soient n un entier et V une partie compacte de $\mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}$. Les énoncés suivant sont équivalents :*

1. *l'ensemble V est une partie spectralement convexe de $\mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}$;*
2. *pour tout $\mathcal{A}$-algèbre de Banach uniforme $\mathcal{B}$ et tout morphisme de $\mathcal{A}$-algèbre*
$$\mathcal{A}[T_1, \ldots, T_n] \to \mathcal{B},$$
le morphisme d'espaces topologiques $\mathcal{M}(\mathcal{B}) \to \mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}$ correspondant se factorise par V si et seulement si $\mathcal{A}[T_1, \ldots, T_n] \to \mathcal{B}$ se factorise par $\mathcal{B}(V)$.

Ce critère a l'avantage d'être plus fonctoriel que le précédent. Ainsi il sera plus facile à manier dans les démonstrations par propriétés universelles.

Démonstration de la proposition. Soient V une partie compacte spectralement convexe de $\mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}$, $\mathcal{B}$ une $\mathcal{A}$-algèbre de Banach et $\mathcal{A}[T_1, \ldots, T_n] \to \mathcal{B}$.

Si le morphisme $\mathcal{M}(\mathcal{B}) \to \mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}$ correspondant se factorise par V, le lemme précédent assure que le morphisme de $\mathcal{A}$-algèbres $\mathcal{A}[T_1, \ldots, T_n] \to \mathcal{B}$ se factorise de manière unique par $\mathcal{A}[T_1, \ldots, T_n] \to \mathcal{B}(V)$.

Si le morphisme $\mathcal{A}[T_1, \ldots, T_n] \to \mathcal{B}$ se factorise par $\mathcal{A}[T_1, \ldots, T_n] \to \mathcal{B}(V)$, le morphisme $\mathcal{M}(\mathcal{B}) \to \mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}$ se factorise lui aussi par $V = \mathcal{M}(\mathcal{B}(V)) \to \mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}$.

Soit V une partie compacte de $\mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}$ satisfaisant la deuxième propriété.

Par hypothèse, le morphisme $\mathcal{M}(\mathcal{B}(V)) \to \mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}$ se factorise par V. Ainsi par la proposition 1.1, l'ensemble V est une partie compacte spectralement convexe de $\mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}$. □

Afin de pouvoir calculer des anneaux de fonctions $\mathcal{B}(V)$, nous allons faire quelques remarques sur le produit tensoriel séparé complété d'algèbres Banach.

Proposition 1.6. *Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux algèbres de Banach uniformes et $\varphi : \mathcal{C} \to \mathcal{A}$, et $\psi : \mathcal{C} \to \mathcal{B}$ deux morphismes d'algèbres de Banach. On note $\widehat{\mathcal{C}}$ le séparé complété de $\mathcal{C}$ pour la norme uniforme sur $\mathcal{M}(\mathcal{C})$ que l'on notera $\|\cdot\|_\infty$.*

Les morphismes $\mathcal{C} \to \mathcal{A}$ et $\mathcal{C} \to \mathcal{B}$ s'étendent en des morphismes $\widehat{\mathcal{C}} \to \mathcal{A}$ et $\widehat{\mathcal{C}} \to \mathcal{B}$ de manière unique. De plus, le morphisme naturel $\mathcal{A}\widehat{\otimes}_{\mathcal{C}}\mathcal{B} \to \mathcal{A}\widehat{\otimes}_{\widehat{\mathcal{C}}}\mathcal{B}$ est un isomorphisme d'algèbres de Banach.

Démonstration de la proposition. Pour démontrer la première partie il suffit de remarquer que puisque $\mathcal{A}$ est uniforme, pour tout $f \in \mathcal{C}$, nous avons l'inégalité suivante :

$$\|\varphi(f)\|_{\mathcal{A}} = \sup_{n\in\mathbb{N}}(\|\varphi(f)^n\|_{\mathcal{A}})^{1/n} \leq \|\varphi\| \sup_{n\in\mathbb{N}}(\|f^n\|_{\mathcal{C}})^{1/n} = \|\varphi\| \cdot \|f\|_\infty$$

qui assure l'existence et l'unicité de la factorisation (et de même pour $\mathcal{B}$).

Passons maintenant à la seconde partie. Par propriété universelle, il suffit de montrer que tout morphisme d'algèbres de Banach $\mathcal{A}\widehat{\otimes}_{\mathcal{C}}\mathcal{B} \to \mathcal{D}$ se factorise de manière unique par $\mathcal{A}\widehat{\otimes}_{\widehat{\mathcal{C}}}\mathcal{B}$. La donnée d'un morphisme $\mathcal{A}\widehat{\otimes}_{\mathcal{C}}\mathcal{B} \to \mathcal{D}$ est équivalente à la donnée d'un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{D} & \mathcal{B} \arrow[l] . \\ \mathcal{A} \arrow[u] & \mathcal{C} \arrow[l] \arrow[u] \end{tikzcd}$$

Mais le premier paragraphe assure que la donnée d'un tel diagramme est équivalente à la donnée d'un diagramme commutatif de la forme suivante :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{D} & \mathcal{B} \arrow[l] . \\ \mathcal{A} \arrow[u] & \widehat{\mathcal{C}} \arrow[l] \arrow[u] \end{tikzcd}$$

Ce dernier diagramme est équivalent à la donnée d'un morphisme $\mathcal{A}\widehat{\otimes}_{\widehat{\mathcal{C}}}\mathcal{B} \to \mathcal{D}$. Ainsi le morphisme $\mathcal{A}\widehat{\otimes}_{\mathcal{C}}\mathcal{B} \to \mathcal{D}$ se factorise de manière unique par $\mathcal{A}\widehat{\otimes}_{\widehat{\mathcal{C}}}\mathcal{B}$. □

Soient $U \subset B := \mathcal{M}(\mathcal{A})$ une partie compacte spectralement convexe, P un polynôme à coefficients dans $\mathcal{B}(U)$ et $s < t$ deux réels positifs. L'ensemble $\overline{D}_U(P; s, t)$ est spectralement convexe (c'est une conséquence de l'exemple 1.3, de la stabilité par intersection des ensembles spectralement convexes et de la proposition 1.2.16 de [Poi10]). Qui plus est, dans le cas où $P = T$, nous pouvons dire plus.

On note $\mathcal{B}(U)\langle s \leq |T| \leq t\rangle$ l'algèbre formée des séries $\sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k T^k$ telles que les a_k appartiennent à $\mathcal{B}(U)$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$ et telles que la série $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \|a_k\|_U \max\{s^k, t^k\}$ soit convergente. On prend la convention que si s est nul, s^k avec k un nombre négatif vaut $+\infty$ et donc que dans ce cas a_k est nul pour tout $k \in \mathbb{Z}\backslash\mathbb{N}$. On munit $\mathcal{B}(U)\langle s \leq |T| \leq t\rangle$ de la norme suivante :

$$\begin{array}{cccc} \|.\|_{U,s,t}: & \mathcal{B}(U)\langle s \leq |T| \leq t\rangle & \to & \mathbb{R}^+ \\ & \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k T^k & \mapsto & \sum_{k\in\mathbb{Z}} \|a_k\|_U \max\{s^k, t^k\} \end{array}.$$

Cette norme lui donne une structure d'algèbre de Banach.

L'application $\mathcal{M}(\mathcal{B}(U)\langle s \leq |T| \leq t\rangle) \to \mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}$ induit une bijection entre $\overline{D}_U(s,t)$ et l'ensemble sous-jacent au spectre analytique $\mathcal{M}(\mathcal{B}(U)\langle s \leq |T| \leq t\rangle)$ (voir proposition 2.1.1 de [Poi10]).

Remarque 1.7. Soit V un ensemble compact spectralement convexe de $\mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}$. Pour tout entier $m \geq n$, il y a une identification naturelle entre les espaces topologiques $\mathbb{A}^{m-n}_{\mathcal{B}(V)}$ et $p^{-1}_{m,n}(V)$ (c'est la Proposition 1.2.16 de [Poi10]). En particulier, l'ensemble $p^{-1}_{m,n,B}(x)$ sera canoniquement homéomorphe à $\mathbb{A}^{m-n}_{\mathscr{H}(x)}$. De plus, $p^{-1}_{m,n}(\mathring{V})$ est isomorphe en tant qu'espace annelé à son image dans $\mathbb{A}^{m-n}_{\mathcal{B}(V)}$.

Soit V un ensemble compact spectralement convexe de $\mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}$. On dit qu'une partie Γ fermée de V est un **bord analytique** de V si pour tout $f \in \mathcal{B}(V)$ on a l'égalité :

$$\|f\|_\Gamma = \|f\|_V.$$

On appelle **bord de Shilov** de V son plus petit bord analytique (s'il existe).

Soit U un ouvert d'un espace affine. Nous appellerons partie ultramétrique de U et noterons U_{um} l'ensemble des points x de U tels que $\mathscr{H}(x)$ soit un corps ultramétrique. Cet ensemble est fermé dans U. En effet, il est égal à $\{x \in U |\ |2|_x \leq 1\}$.

Définition 1.8. Soient U un ouvert d'un espace affine et $x \in U$. Nous dirons que x est **ultramétrique typique** s'il appartient à $\overbrace{U_{um}}^{\circ}$ et s'il admet une base de voisinages formée d'ensembles compacts et spectralement convexes possédant un bord analytique fini.

Remarque 1.9. La dénomination ultramétrique typique provient du fait que les points d'un bon espace analytique de Berkovich au-dessus d'un corps non archimédien possèdent ces propriétés.

Définition 1.10. Nous dirons qu'un anneau de Banach $\mathcal{A}$ est **raisonnable** si quel que soit $x \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$ tel que $\mathscr{H}(x)$ soit de caractéristique non nulle est ultramétrique typique.

Remarque 1.11. La dénomination raisonnable est là pour rappeler que ces anneaux de Banach possèdent des porpriétés de base commune à la plupart des anneaux de Banach qui vont nous intéresser par la suite.

La proposition suivante est démontré dans l'article [Poi13] (Proposition 6.10).

Proposition 1.12. *Soit $b \in B$ un point ultramétrique typique. Tout point $x \in \mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}$ au-dessus de b est ultramétrique typique.*

Définition 1.13. Soient $(S, \mathcal{O}_S)$ un espace localement annelé, et $s \in S$. Nous dirons que **le principe du prolongement analytique vaut au voisinage de** s si, pour tout élément non nul f de $\mathcal{O}_{S,s}$, il existe un voisinage ouvert U de s vérifiant les propriétés suivantes :

1. f est définie sur U ;
2. pour tout $t \in U$, l'image de f dans $\mathcal{O}_{S,t}$ est non nulle.

Nous dirons que **le principe du prolongement analytique vaut sur** S s'il vaut au voisinage de tout point de S.

De manière équivalente, le principe de prolongement analytique vaut sur S si pour tout ouvert U et toute fonction $f \in \mathcal{O}_S(U)$, l'ensemble des points $t \in U$ au voisinage desquels f est nulle est fermé.

1.3 Rappels de résultats obtenus par Jérôme Poineau

Jérôme Poineau a montré dans [Poi13] que sous certaines conditions sur l'anneau de Banach $\mathcal{A}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, le faisceau structural $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}}$ est un faisceau cohérent. Nous allons expliciter en quoi consistent ces conditions et quelles sont les propriétés de bases qui en découlent. Tous les résultats de cette partie (sauf la proposition 1.22) proviennent de [Poi13].

Commençons par donner deux théorèmes qui sont cruciaux en géométrie analytique. Ils ont notamment été les outils principaux dans la démonstration de la cohérence du faisceau structural.

Théorème 1.14 (Division de Weierstraß). *Soient $\mathcal{A}$ un anneau de Banach et b un point de $B := \mathcal{M}(\mathcal{A})$. Nous supposerons que b est ultamétrique typique si $\mathscr{H}(b)$ est de caractéristique non nulle et trivialement valué. Soit $P(S) \in \mathscr{H}(b)[S]$ un polynôme irréductible et unitaire de degré d.*

Notons x le point rigide de la fibre $\mathbb{A}^1_{\mathscr{H}(b)}$ défini par l'équation $P = 0$. Soit G un élément de l'anneau local $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^1_{\mathcal{A}},x}$. Supposons que son image dans $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^1_{\mathscr{H}(b)},x}$ n'est pas nulle et notons n sa valuation P-adique.

Alors, pour tout $F \in \mathcal{O}_{\mathbb{A}^1_{\mathcal{A}},x}$, il existe un unique couple $(Q, R) \in \mathcal{O}^2_{\mathbb{A}^1_{\mathcal{A}},x}$ tel que

1. *$F = QG + R$;*
2. *$R \in \mathcal{O}_{B,b}[S]$ est un polynôme de degré strictement inférieur à nd.*

Si $n = 0$, G n'appartient pas à l'idéal maximal de $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^1_{\mathcal{A}},x}$ et donc est inversible dans $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^1_{\mathcal{A}},x}$. Ainsi, l'énoncé est trivial dans ce cas.

Théorème 1.15 (Préparation de Weierstraß). *Soient $\mathcal{A}$ un anneau de Banach et b un point de $B := \mathcal{M}(\mathcal{A})$. Nous supposerons que b est ultamétrique typique si $\mathscr{H}(b)$ est de* *caractéristique non nulle et trivialement valué. Soit $P(S) \in \kappa(b)[S]$ un polynôme unitaire de degré d dont l'image dans $\mathscr{H}(b)[S]$ est irréductible.*

Notons x le point rigide de la fibre $\mathbb{A}^1_{\mathscr{H}(b)}$ défini par l'équation $P = 0$. Soit G un élément de l'anneau local $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^1_{\mathcal{A}},x}$. Supposons que son image dans $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^1_{\mathscr{H}(b)},x}$ n'est pas nulle et notons n sa valuation P-adique.

Alors il existe un unique couple $(\Omega, E) \in \mathcal{O}^2_{\mathbb{A}^1_{\mathcal{A}},x}$ tel que :

1. *$\Omega \in \mathcal{O}_{B,b}[S]$ est un polynôme unitaire de degré nd vérifiant l'égalité $\Omega(b) = P(S)^n$ dans $\mathscr{H}(b)[S]$;*
2. *E est inversible dans $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^1_{\mathcal{A}},x}$;*
3. *$G = \Omega E$.*

Remarque 1.16. Nous utiliserons extrêmement souvent ces énoncés dans des démonstrations par récurrence sur la dimension. La remarque suivante permet d'utiliser ces énoncés dans un cas relatif.

Pour tout sous-ensemble compact spectralement convexe V de $\mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}$, d'après la remarque 1.7 il y a un isomorphisme d'espaces annelés entre $(p_{n+1,n})^{-1}(\mathring{V})$ et l'ouvert de $\mathbb{A}^1_{\mathcal{B}(V)}$ constitué des points qui s'envoient sur $\mathring{V}$ dans $\mathcal{M}(\mathcal{B}(V)) \simeq V$. Ainsi quitte à prendre un voisinage suffisamment petit U d'un point x de $\mathbb{A}^{n+1}_{\mathcal{A}}$, on peut supposer qu'il est inclus dans $(p_{n+1,n})^{-1}(\mathring{V})$ avec V spectralement convexe. Nous sommes donc ramené à considérer un ouvert dans $\mathbb{A}^1_{\mathcal{B}(V)}$. Nous pouvons ainsi utiliser les deux théorèmes énoncés précédemment.

Définition 1.17. Soit $\mathcal{A}$ un anneau de Banach. Soient b un point de $B = \mathcal{M}(\mathcal{A})$ et $\mathcal{U}$ une base de voisinages compacts de b. Nous dirons qu'un idéal I de $\mathcal{O}_{B,b}$ est **$\mathcal{B}$-fortement de type fini** relativement à $\mathcal{U}$ s'il existe $f_1, \ldots, f_p$ appartenant à I tels que :

— pour tout $U \in \mathcal{U}$ et $i \in [\![1, p]\!]$, f_i est $\mathcal{B}$-défini sur U.

— pour tout voisinage compact V de b, il existe une famille de nombres réels strictement positifs $(K_{U,V})_{U \in \mathcal{U}}$ telle que, pour tout élément $f \in I$ qui est $\mathcal{B}$-défini sur V et tout élément $U \in \mathcal{U}$ contenu dans $\mathring{V}$, il existe des éléments $a_1, \ldots, a_p$ de $\mathcal{B}(U)$ tels que

$$\begin{cases} f = a_1 f_1 + \cdots + a_p f_p \text{ dans } \mathcal{B}(U) \ ; \\ \forall i \in [\![1, p]\!], \|a_i\|_U \leq K_{U,V} \|f\|_V. \end{cases}$$

Une famille $(f_1, \ldots, f_p)$ vérifiant les propiétés précédentes est appelée **$\mathcal{B}$-système de générateurs fort** de l'idéal I relativement à $\mathcal{U}$. On dit également qu'elle **engendre $\mathcal{B}$-fortement** l'idéal I relativement à $\mathcal{U}$.

Définition 1.18. Soient $x \in X$ un point d'un espace topologique et $\mathcal{U}$ une base de voisinages de x. Nous dirons que $\mathcal{U}$ est une **base de voisinages fine** (ou **système fondamental fin de voisinages**) de x si pour tout élément U de $\mathcal{U}$, il existe une base de voisinages de U dans $\mathcal{U}$.

La définition précédente ne relève que de la topologie et est toujours vérifiée lorsque la base de voisinages est formée d'ensembles ouverts.

Définition 1.19. Soit b un point de B. Nous dirons que l'anneau local $\mathcal{O}_{B,b}$ est **fortement régulier** si

1. $\mathcal{O}_{B,b}$ est noethérien. On note n sa dimension de Krull,
2. il existe $f_1, \ldots, f_n$ des éléments de m_b et une base de voisinages fine $\mathcal{U}$ de b formée d'ensembles compacts spectralement convexes tel que $(f_1, \ldots, f_n)$ engendre $\mathcal{B}$-fortement relativement à $\mathcal{U}$ l'idéal m_b.

Dans le cas où $n = 0$ (resp. $n = 1$), nous dirons que $\mathcal{O}_{B,b}$ est un **corps fort** (resp. **fortement de valuation discrète**).

Remarque 1.20.

— Par définition, les anneaux qui sont des corps forts sont des corps et les anneaux locaux qui sont fortement de valuation discrète sont des anneaux de valuation discrète. Ainsi, la notation est cohérente.

— Pour l'anneau local des germes de fonctions au voisinage d'un point b, la propriété d'être un corps fort s'apparente à une propriété de prolongement analytique. En effet, on exige que si une section définie sur V est nulle au voisinage de b, elle est nulle sur tout voisinage de b appartenant à $\mathcal{U}$ et inclus dans $\overset{\circ}{V}$. Ainsi, si B vérifie le prolongement analytique au voisinage de tout point et si tous les voisinages appartenant à $\mathcal{U}$ sont connexes, le fait que l'anneau $\mathcal{O}_{B,b}$ soit un corps implique que c'est un corps fort pour la base de voisinages $\mathcal{U}$.

Les trois définitions techniques précédentes n'auront pas un rôle central dans cette thèse. Nous aurons juste besoin de la propriété de stabilité que nous allons énoncer un peu plus bas. Pour l'énoncer, nous aurons également besoin des définitions et des propriétés suivantes :

Définition 1.21. Soit $b \in B$ un point de $B := \mathcal{M}(\mathcal{A})$ et n un entier. Soit x un point $\mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}$ au-dessus de b.

1. Nous dirons que le point x est **purement localement transcendant** si les éléments $T_1(x), \ldots, T_n(x)$ de $\kappa(x)$ sont algébriquement indépendants sur $\kappa(b)$.
2. Nous dirons que le point x est **rigide épais** si $\kappa(x)$ est une extension finie de $\kappa(b)$.

Proposition 1.22. *Soit $x \in \mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}$ un point au-dessus de $b := \pi(x)$. Si le n-uplet des valeurs des fonctions coordonnées $(T_1(x), \ldots, T_n(x)) \in \kappa(x)^n$ est formé d'éléments algébriques sur $\kappa(b)$, $\kappa(x)$ est une extension finie de $\kappa(b)$. Ainsi x est un point rigide épais au-dessus de b.*

Démonstration de la proposition. Nous allons montrer cet énoncé par récurrence sur n.

Le cas $n = 0$ est trivial. Supposons que nous ayons montré l'énoncé pour $n \in \mathbb{N}$. On note $x_{n-1} := p_{n,n-1}(x)$ la projection sur les $n-1$ premières variables.

L'élément $T_n(x)$ est algébrique sur $\kappa(b)$ et donc sur $\kappa(x_{n-1})$. Soient $P_n \in \kappa(x_{n-1})[T]$ son polynôme minimal unitaire sur ce dernier et $\tilde{P}_n \in \mathcal{O}_{\mathbb{A}^{n-1}_{\mathcal{A}}, x_{n-1}}[T]$ un relèvement unitaire de ce dernier du même degré. Soient $a \in \kappa(x)$ et $f \in \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}, x}$ un relèvement de a.

Grâce au théorème de division de Weierstraß, on sait qu'il existe $R \in \mathcal{O}_{\mathbb{A}^{n-1}_{\mathcal{A}},x_{n-1}}[T]$ de degré strictement inférieur à $\deg(\tilde{P}_n) = \deg(P_n)$ et $Q \in \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_{\mathcal{A}},x}$ tel que $f = Q\tilde{P}_n + R$ dans $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_{\mathcal{A}},x}$. En particulier, nous avons $R(x) = a$. Ainsi, on a l'isomorphisme

$$\kappa(x) \simeq \kappa(x_{n-1})[T]/(P_n).$$

Ce qui implique $\kappa(x)$ est une extension finie de $\kappa(x_{n-1})$.

Or par hypothèse de récurrence $\kappa(x_{n-1})$ est une extension finie de $\kappa(b)$. Ainsi il en est de même de $\kappa(x)$ au-dessus de $\kappa(b)$. □

La proposition suivante est un cas particulier du corollaire 9.11 de [Poi13] :

Proposition 1.23. *Soient b un point de B et x un point de $\mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}$ purement localement transcendant au-dessus de b. Si $\mathcal{O}_{B,b}$ est un corps fort (resp. un anneau fortement de valuation discrète d'uniformisante π_b), $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_{\mathcal{A}},x}$ est un corps fort (resp. un anneau fortement de valuation discrète d'uniformisante $\pi_x = \pi_b$). Notons de plus que si la base de voisinages $\mathcal{U}$ intervenant dans la définition de forte régularité de b satisfait les axiomes des points ultramétriques typiques (i.e. chaque voisinage est inclus dans la partie ultramétrique et possède un bord analytique fini), on peut choisir la base de voisinage $\mathcal{U}'$ de x, de sorte qu'elle vérifie aussi ces mêmes axiomes.*

Remarque 1.24.

— L'une des conséquences de la proposition précédente est que si x est un point purement localement transcendant au-dessus de b, l'anneau $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_{\mathcal{A}},x}$ est un corps fort (resp. un anneau de valuation discrète) lorsque $\mathcal{O}_{B,b}$ est un corps fort (resp. un anneau fortement de valuation discrète). Ceci nous permettra de nous ramener à de nombreuses reprises au cas d'un point rigide épais au-dessus de l'un de ces deux types d'anneaux.

— Soit $x \in \mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}$. Quitte à échanger les variables, il existe $k \in [\![0, n]\!]$ tel que la projection de x sur les k premières variables $x_k := p_{n,k}(x)$ soit purement localement transcendante au-dessus de $\pi(x)$ et tel que x soit rigide épais au-dessus de x_k. Pour voir ce fait, il suffit de procéder par récurrence sur $T_1(x), \ldots, T_n(x)$, si tous ces éléments de $\kappa(x)$ sont algébriques sur $\kappa(b)$ alors x est rigide épais au-dessus de b. Sinon, il existe i tel que $T_i(x)$ soit transcendant au-dessus de $\kappa(b)$ et quitte à échanger les coordonnées on peut supposer c'est $T_1(x)$. Maintenant on réitère le procéder en remplaçant b par $x_1 := p_{n,1}(x)$.

Passons maintenant à la définition des anneaux de Banach pouvant être prise comme base pour faire de la géométrie analytique.

Définition 1.25. Un anneau de Banach $(\mathcal{A}, \|.\|)$ est dit **de base** s'il est raisonnable et si, pour tout point b de son spectre $B = \mathcal{M}(\mathcal{A})$, il existe un système fondamental fin de voisinages compacts et spectralement convexes $\mathcal{U}_b$ vérifiant les propriétés suivantes :

L'anneau local $\mathcal{O}_{B,b}$ est un anneau local noethérien, fortement régulier relativement à $\mathcal{U}_b$ et de dimension inférieure à 1, c'est-à-dire un corps fort ou un anneau fortement de valuation discrète.

Remarque 1.26. Il est à noter que notre définition d'anneau de base est un peu plus restrictive que celle de Jérôme Poineau (nous supposons que tout les points dont le corps résiduel est de caractéristique positive sont ultramétriques typiques et non seulement ceux dont le corps est trivialement valué) cependant tous les exemples de la remarque 9.6 de [Poi13] sont des anneaux de base en notre sens. Nous avons ajouté cette restriction pour que les points rigides épais aient des bases de voisinages plus simple et ainsi pour considérablement simplifier certaines preuves (notamment dans le chapitre sur la fermeture des idéaux).

Les exemples qu'il faut avoir en tête sont les anneaux d'entiers de corps de nombres $\mathcal{A}$ munis de la norme $\|.\|$ définie de la façon suivante :

$$\begin{array}{rccc} \|.\|: & \mathcal{A} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \max_\sigma |\sigma(x)|_\mathbb{C} \end{array},$$

où σ parcourt l'ensemble des plongements de $\mathcal{A}$ dans le corps des complexes, et $|.|_\mathbb{C}$ est la norme usuelle sur le corps des complexes (voir [Poi10] partie 3.1 pour une démonstration du fait que cet anneau de Banach soit un anneau de base). D'autres exemples intéressants, sont les corps munis d'une norme multiplicative pour laquelle ils sont complets.

Les théorèmes suivants assurent que dans le cadre auquel nous nous sommes restreint l'anneau des germes de fonctions analytiques se comporte bien au voisinage des points rigides épais.

Théorème 1.27. *Soient $\mathcal{A}$ un anneau de Banach de base, $b \in B = \mathcal{M}(\mathcal{A})$, et $x \in \mathbb{A}^n_\mathcal{A}$ un point rigide épais au-dessus de b.*

Alors l'anneau local $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_\mathcal{A},x}$ est nœthérien et fortement régulier. De plus, nous avons l'égalité suivante :

$$\dim(\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_\mathcal{A},x}) = \dim(\mathcal{O}_{B,b}) + n.$$

Enfin, si b est ultramétrique typique, x l'est aussi et la base de voisinages intervenant dans la définition d'anneau fortement régulier peut être choisie de sorte qu'elle vérifie les axiomes de celle des points ultramétrique typique.

Nous allons maintenant pouvoir étudier la dimension de Krull des anneaux locaux des espaces affines.

Soit $x \in \mathbb{A}^n_\mathcal{A}$. Quitte à échanger les coordonnées, nous pouvons supposer qu'il existe un entier $m \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq m \geq 0$, la projection de x sur les m premières variables x_m soit purement localement transcendante au-dessus de $\pi(x)$ et x soit rigide épais au-dessus de x_m. La proposition 1.23 assure que la dimension de Krull de $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^m_\mathcal{A},x_m}$ est égale à la dimension de Krull de $\mathcal{O}_{B,\pi(x)}$. Soit V un voisinage compact spectralement convexe de x_m dans $\mathbb{A}^m_\mathcal{A}$. Nous pouvons maintenant identifier $\mathbb{A}^{n-m}_{\mathcal{B}(V)}$ à un voisinage de x dans $\mathbb{A}^n_\mathcal{A}$. Le théorème 1.27 assure que la dimension de Krull de $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_\mathcal{A},x} \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{A}^{n-m}_{\mathcal{B}(V)},x}$ est égale à la dimension de $\mathcal{O}_{\mathcal{M}(\mathcal{B}(V)),x_m} \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{A}^m_\mathcal{A},x_m}$ plus $n-m$.

Nous obtenons donc le théorème suivant :

Théorème 1.28. *Soit $\mathcal{A}$ un anneau de base. Pour tout $x \in \mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}$ l'anneau local $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_{\mathcal{A}},x}$ est noethérien de dimension de Krull inférieure à $n + \dim(\mathcal{O}_{B,b})$.*

Signalons aussi le fait suivant contenu dans le Théorème 9.18 de [Poi13] :

Théorème 1.29. *Soit $\mathcal{A}$ un anneau de base. Pour tout $x \in \mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}$ l'anneau local $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_{\mathcal{A}},x}$ est régulier.*

Rappelons (voir [Poi10] partie 3.6) que pour tout anneau d'entiers de corps de nombres $\mathcal{A}$ muni de la norme décrite plus haut, l'espace localement annelé $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ vérifie le principe du prolongement analytique. de même que pour tout corps muni d'une norme multiplicative pour laquelle il est complet. Ainsi nous allons pouvoir utiliser la proposition suivante (voir Lemme 11.3 de [Poi13]) :

Proposition 1.30. *Soit $\mathcal{A}$ un anneau de base tel que $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ vérifie le principe du prolongement analytique. L'espace analytique $\mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}$ vérifie le principe du prolongement analytique.*

Cela nous amène à un théorème qui sera utilisé à de nombreuses reprises durant ce travail.

Théorème 1.31. *Soit $\mathcal{A}$ un anneau de Banach de base tel que $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ vérifie le principe du prolongement analytique. Le faisceau structural de $\mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}$ est cohérent.*

En particulier, le faisceau structural des espaces affines au-dessus d'un anneau d'entiers de corps de nombres est cohérent (de même pour un corps valué complet).

Chapitre 2

Définition des espaces analytiques et des morphismes d'espaces analytiques

Dans ce chapitre, nous allons introduire la notion de catégorie d'espaces analytiques sur un anneau de Banach $\mathcal{A}$ quelconque. Nous la noterons $An_{\mathcal{A}}$.

Puis nous nous intéresserons à une catégorie un peu plus large que $An_{\mathcal{A}}$ qui permettra de voir les points d'un espace analytique comme un espace analytique au-dessus de $\mathcal{A}$ (en un sens à préciser).

Enfin, nous étudirons la notion d'immersion d'espaces analytiques.

2.1 Catégorie des espaces $\mathcal{A}$-analytiques

Nous allons maintenant définir ce que nous entendrons par espace analytique et morphisme d'espaces analytiques au-dessus d'un anneau de Banach $\mathcal{A}$ (ou espace $\mathcal{A}$-analytique et morphisme d'espace $\mathcal{A}$-analytiques). Les définitions qui suivent ne requièrent pas de propriétés particulières sur $\mathcal{A}$.

Sous-espace analytique : Soit U un ouvert de $\mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}$. Un **sous-espace analytique de U** est un triplet $(X, \mathcal{O}_X, \mathcal{I})$ où $\mathcal{I}$ est un faisceau cohérent d'idéaux de $\mathcal{O}_U$, où X est le support dans U du faisceau $\mathcal{O}_U/\mathcal{I}$ et $\mathcal{O}_X$ est la restriction de $\mathcal{O}_U/\mathcal{I}$ à X. Le couple $(X, \mathcal{O}_X)$ est un espace localement anneé.

Lorsque cela ne portera pas à confusion, nous écrirons parfois $(X, \mathcal{O}_X)$ voire X au lieu de $(X, \mathcal{O}_X, \mathcal{I})$.

Remarque 2.1.

— Soient $(X, \mathcal{O}_X, \mathcal{I})$ un sous-espace analytique d'un ouvert U de $\mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}$ et V un ouvert de X. L'ouvert V hérite naturellement d'une structure de sous-espace analytique d'un ouvert V' de $\mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}$. En effet, il existe un ouvert V' de U tel que $X \cap V' = V$, ainsi V est le support du faisceau $\mathcal{O}_{V'}/\mathcal{I}_{|V'}$ et ainsi $(V, \mathcal{O}_V \simeq (\mathcal{O}_X)_{|V}, \mathcal{I}_{|V'})$ a une structure de sous-espace analytique de V'.

— Soient $(X, \mathcal{O}_X, \mathcal{I})$ un sous-espace analytique d'un ouvert U de $\mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}$, et x un point de X. Nous noterons $\kappa(x)$ le corps résiduel de x (vu comme une semi-norme sur $\mathcal{A}[T_1, \ldots, T_n]$) et $\mathscr{H}(x)$ sa complétion pour la norme associée à x (vue comme une semi-norme sur $\mathcal{A}[T_1, \ldots, T_n]$).

— Soit $(X, \mathcal{O}_X, \mathcal{I})$ un sous-espace analytique d'un ouvert U de $\mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}$. L'inclusion de X dans U induit un morphisme d'espaces localement annelés $(j, j^{\#})$ de $(X, \mathcal{O}_X)$ dans $(U, \mathcal{O}_U)$. Qui plus est, par construction $j^{\#} : \mathcal{O}_U \to j_*(\mathcal{O}_X)$ est un épimorphisme de faisceaux.

La définition de morphisme de sous-espaces analytiques va se faire en plusieurs temps. Dans un premier temps nous allons définir les morphismes entre ouverts d'espaces affines. Ensuite, nous définirons les morphismes allant d'un sous-espace analytique d'un ouvert de $\mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}$ dans un ouvert d'un espace affine. Enfin, nous donnerons la définition dans le cas général.

<u>Morphisme entre ouverts d'espaces affines :</u> Soient U et V deux ouverts respectivement de $\mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}$ et $\mathbb{A}^{n'}_{\mathcal{A}}$. Un morphisme entre ouverts d'espaces affines $(\varphi, \varphi^{\#}) : (U, \mathcal{O}_U) \to (V, \mathcal{O}_V)$ est un morphisme d'espaces localement annelés vérifiant la condition suivante : pour tout point $x \in U$ et tout voisinage compact V' de $\varphi(x)$ dans V, il existe un voisinage compact U' de x dans U tel que $\varphi(U')$ soit inclus dans V' et le morphisme $\varphi^{\#} : \mathcal{O}_V(V') \to \mathcal{O}_U(U')$ soit borné (*i.e.* pour tout $f \in \mathcal{O}_V(V')$ on a l'inégalité $\|\varphi^{\#}(f)\|_{U'} \leq \|f\|_{V'}$).

<u>Morphisme allant d'un sous-espace analytique dans un ouvert d'un espace affine :</u> Soient $(X, \mathcal{O}_X)$ un sous-espace analytique de $U \subset \mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}$ et V un ouvert de $\mathbb{A}^{n'}_{\mathcal{A}}$. Un morphisme d'espaces analytiques $(\varphi, \varphi^{\#}) : (X, \mathcal{O}_X) \to (V, \mathcal{O}_V)$ est un morphisme d'espaces localement annelés tel que pour tout $x \in X$, il existe un voisinage ouvert U' de x dans U et un morphisme entre ouverts d'espaces affines $(\tilde{\varphi}, \tilde{\varphi}^{\#}) : (U', \mathcal{O}_{U'}) \to (V, \mathcal{O}_V)$ faisant commuter le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
(U', \mathcal{O}_{U'}) \arrow[r, "(\tilde{\varphi}, \tilde{\varphi}^{\#})"] & (V, \mathcal{O}_V) \\
(X \cap U', \mathcal{O}_{X \cap U'}) \arrow[u, hook] \arrow[ur, "(\varphi, \varphi^{\#})"'] &
\end{tikzcd}.$$

<u>Morphisme de sous-espaces analytiques :</u> Soient $(X, \mathcal{O}_X)$ et $(Y, \mathcal{O}_Y)$ deux sous-espaces analytiques respectivement de deux ouverts d'espaces affines $U \subset \mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}$ et $V \subset \mathbb{A}^{n'}_{\mathcal{A}}$. On note $(j, j^{\#}) : (Y, \mathcal{O}_Y) \to (V, \mathcal{O}_V)$ le morphisme d'espaces annelés induit par l'inclusion de Y dans V. Un **morphisme d'espaces analytiques** $(\varphi, \varphi^{\#}) : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ est un morphisme d'espaces localement annelés tel que $(j \circ \varphi, (j \circ \varphi)^{\#}) : (X, \mathcal{O}_X) \to (V, \mathcal{O}_V)$ soit un morphisme allant d'un sous-espace analytique dans un ouvert d'un espace affine au sens de la définition précédente.

Remarque 2.2.

— Il découle de la définition que le fait, pour un morphisme d'espaces localement annelé, d'être un morphisme d'espaces analytiques est une notion locale. C'est-à-dire qu'un morphisme d'espaces localement annelés $(\varphi, \varphi^{\#}) : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ (avec $(X, \mathcal{O}_X)$ et $(Y, \mathcal{O}_Y)$ des sous-espaces analytiques d'ouverts d'espaces affines) est un morphisme d'espaces analytiques si et seulement si pour tout ouverts U et V de X et Y tel que $\varphi(U)$ est inclus dans V, le morphisme d'espaces localement annelés $(\varphi, \varphi^{\#}) : (U, \mathcal{O}_U) \to (V, \mathcal{O}_V)$ est un morphisme d'espaces analytiques.

— Il découle de la définition que la composition de deux morphismes de sous-espaces analytiques est un morphisme de sous-espaces analytiques.

Dans le cas des morphismes entre ouverts d'espaces affines, nous avons une caractérisation plus simple en pratique de morphisme d'espaces analytiques.

Proposition 2.3. *Soit $(\varphi, \varphi^{\#}) : (U, \mathcal{O}_U) \to (V, \mathcal{O}_V)$ un morphisme d'espaces annelés entre ouverts d'espaces affines. Les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

- *le morphisme $(\varphi, \varphi^{\#})$ est un morphisme d'espaces analytiques ;*
- *le morphisme d'espaces localement annelés induit pour tout $x \in U$ un plongement isométrique de corps $\varphi^{\#} : \kappa(\varphi(x)) \to \kappa(x)$.*

Démonstration de la proposition. Commençons d'abord par montrer que si $(\varphi, \varphi^{\#})$ est un morphisme d'espaces analytiques, il vérifie la deuxième condition.

Soit $a \in \kappa(\varphi(x))$. Il existe $f \in \mathcal{O}_{V,\varphi(x)}$ tel que $f(\varphi(x)) = a$. Par définition, il existe un voisinage compact V' de $\varphi(x)$ dans V tel que f soit définie sur V'. Il existe un voisinage compact U' de x dans U tel que $\varphi(U')$ soit un sous-ensemble de V' et tel que l'on ait l'inégalité :

$$\|\varphi^{\#}(f)\|_{U'} \leq \|f\|_{V'}.$$

Nous avons, de plus, l'égalité $|a| = |f(\varphi(x))| = \lim\limits_{V' \ni \varphi(x)} \|f\|_{V'}$ où V' parcourt les voisinages compacts de $\varphi(x)$ dans V sur lesquels f est défini. Enfin, nous avons aussi l'inégalité $|\varphi^{\#}(f)(x)| \leq \|\varphi^{\#}(f)\|_{U'}$. Par passage à la limite nous obtenons l'inégalité recherchée $|\varphi^{\#}(f)(x)| \leq |f(\varphi(x))|$. Cette inégalité est suffisante puisque les normes sur les corps sont multiplicatives.

Montrons, maintenant, l'autre implication. Soient $x \in U$, V' un voisinage compact de $\varphi(x)$ dans V et U' un voisinage compact de x dans $\varphi^{-1}(V')$. Soit, de plus, $f \in \mathcal{O}_V(V')$. Par hypothèse, pour tout $x' \in U'$, on a $|f(\varphi(x'))| = |\varphi^{\#}(f)(x')|$. Ainsi, on a l'inégalité $|\varphi^{\#}(f)(x)| \leq \sup\limits_{y \in V'} |f(y)| = \|f\|_{V'}$ ceci étant vrai pour tout $x \in U'$, on a donc que $\|\varphi^{\#}(f)\|_{U'} \leq \|f\|_{V'}$. Le morphisme $(\varphi, \varphi^{\#})$ est donc un morphisme d'espaces analytiques. □

Exemple 2.4. Soient n, k deux entiers positifs et $f : \mathcal{A}[T_1, \ldots, T_k] \to \mathcal{A}[S_1, \ldots, S_n]$ un morphisme de $\mathcal{A}$-algèbres. Nous allons lui associer de manière fonctorielle un morphisme $\varphi_f : \mathbb{A}^n_{\mathcal{A}} \to \mathbb{A}^k_{\mathcal{A}}$.

Le morphisme entre les espaces topologiques $\varphi_f : \mathbb{A}^n_{\mathcal{A}} \to \mathbb{A}^k_{\mathcal{A}}$ est défini de la manière suivante. Soit $x : \mathcal{A}[S_1, \ldots, S_n] \to \mathbb{R}^+$ une semi-norme multiplicative bornée sur $\mathcal{A}$ par la norme de $\mathcal{A}$. La semi-norme $\varphi_f(x)$ est la semi-norme correspondant au morphisme composé suivant :

$$\varphi_f(x) : \mathcal{A}[T_1, \ldots, T_k] \to \mathcal{A}[S_1, \ldots, S_n] \xrightarrow{x} \mathbb{R}^+.$$

L'application φ_f ainsi définie est continue.

Soit $x \in \mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}$. Le morphisme d'algèbre $\mathcal{A}[T_1,\ldots,T_k] \to \mathcal{A}[T_1,\ldots,T_n] \to \mathscr{H}(x)$, correspond à la semi-norme $\varphi_f(x)$, il se factorise donc par $\mathscr{H}(\varphi_f(x))$. Par définition le morphisme $\varphi^{\#}_{f,x} : \mathscr{H}(\varphi_f(x)) \to \mathscr{H}(x)$ est borné, c'est donc une isométrie (cela provient du fait que ce sont des corps valués).

Nous allons maintenant construire l'application $\varphi^{\#}_f$. Soit V un ouvert de $\mathbb{A}^k_{\mathcal{A}}$ et g un élément de $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^k_{\mathcal{A}}}(V)$. Par définition du faisceau structural, cette section est une application $g : V \to \coprod_{y\in V} \mathscr{H}(y)$ telle que $g(y)$ appartienne à $\mathscr{H}(y)$ et tel que pour tout $y \in V$ il existe un voisinage compact V' de y dans V tel que g soit limite uniforme de fonctions rationnelles sans pôle $\left(\frac{P_i}{Q_i}\right)_{i\in\mathbb{N}}$ sur V'.

On note $\varphi^{\#}_f(g)$ l'application suivante :

$$\begin{array}{rccc} \varphi^{\#}_f(g) : & \varphi_f^{-1}(V) & \to & \coprod_{x\in\varphi_f^{-1}(V)} \mathscr{H}(x) \\ & x & \mapsto & \varphi^{\#}_f(g)(x) = \varphi^{\#}_{f,x}(g(\varphi_f(x))) \end{array}.$$

Il faut, maintenant, montrer que $\varphi^{\#}_f(g)$ est bien un élément de $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}}(\varphi_f^{-1}(V))$.

Soit $x \in \varphi_f^{-1}(V)$ et U un voisinage compact de x dans $\varphi_f^{-1}(V')$. La suite $\left(\frac{f(P_i)}{f(Q_i)}\right)_{i\in\mathbb{N}}$ est composée de fonctions rationnelles sans pôle sur U. En effet, pour tout $x' \in U$, on a l'égalité $f(Q_i)(x') = Q_i(\varphi_f(x'))$ le terme de droite étant non nul puisque $\varphi_f(x')$ appartient à V'. Il nous reste à montrer que cette suite converge uniformément vers $\varphi^{\#}_f(g)$ sur U.

Soit x' un point appartenant à U. La suite $\left(\frac{f(P_i)(x')}{f(Q_i)(x')}\right)_{i\in\mathbb{N}} = \left(\frac{P_i(\varphi_f(x'))}{Q_i(\varphi_f(x'))}\right)_{i\in\mathbb{N}}$ est convergente dans $\mathscr{H}(\varphi_f(x'))$ vers $g(\varphi_f(x)) = \varphi^{\#}_f(g)(x)$. Ainsi la suite de fonctions rationnelles sans pôle sur U, $\left(\frac{f(P_i)}{f(Q_i)}\right)_{i\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur U vers $\varphi^{\#}_f(g)$ et donc $\varphi^{\#}_f(g)$ appartient à $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}}(\varphi_f^{-1}(V))$.

Il est claire que cette construction est fonctorielle et ainsi induit un morphisme de foncteur $\varphi^{\#}_f : \mathcal{O}_{\mathbb{A}^k_{\mathcal{A}}} \to \varphi_*(\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}})$. Il reste à vérifier que pour tout point $x \in \mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}$ le morphisme $\varphi^{\#}_f : \mathcal{O}_{\mathbb{A}^k_{\mathcal{A}},\varphi_f(x)} \to \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_{\mathcal{A}},x}$ est bien un morphisme local d'anneaux locaux. Mais cela découle que pour tout $g \in \mathcal{O}_{\mathbb{A}^k_{\mathcal{A}},\varphi_f(x)}$, nous avons l'égalité $|g(\varphi_f(x))| = |\varphi^{\#}_f(g)(x)|$. Et donc si g appartient à l'idéal maximal de $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^k_{\mathcal{A}},\varphi_f(x)}$, $|g(\varphi_f(x))| = |\varphi^{\#}_f(g)(x)|$ est nul et donc $\varphi^{\#}_f(g)$ appartient à l'idéal maximal de $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_{\mathcal{A}},x}$.

En particulier, cela implique que si $n \geq k \geq 0$, l'application $p_{n,k} : \mathbb{A}^n_{\mathcal{A}} \to \mathbb{A}^k_{\mathcal{A}}$ est sous-jacente à un morphisme d'espaces analytiques.

Cet exemple sera généralisé dans la proposition 4.1.

Espace $\mathcal{A}$-analytique : Soit $(X, \mathcal{O}_X)$ un espace localement annelé :

- Une **carte** de $(X, \mathcal{O}_X)$ est un ouvert U de X muni d'un isomorphisme d'espaces localement annelés $(j_U, j_U^{\#}) : (U, \mathcal{O}_U) \to (X_U, \mathcal{O}_{X_U})$ où $(X_U, \mathcal{O}_{X_U})$ est un sous-espace analytique d'un ouvert d'espace affine.
- Un **atlas** de $(X, \mathcal{O}_X)$ est un ensemble de cartes de $(X, \mathcal{O}_X)$ tel que l'ensemble des

ouverts de X correspondant forme un recouvrement de X et tel que pour tout couple d'élément U et U' de ce recouvrement, le morphisme suivant :

$$(j_U, j_U^{\#}) \circ (j_{U'}, j_{U'}^{\#})^{-1} : (j_{U'}(U \cap U'), \mathcal{O}_{j_{U'}(U\cap U')}) \to (j_U(U \cap U'), \mathcal{O}_{j_U(U\cap U')})$$

est un isomorphisme de sous-espaces analytiques d'ouverts d'espaces affines.

Deux atlas sur un espace localement annelé sont **compatibles** si la réunion des deux atlas est encore un atlas de $(X, \mathcal{O}_X)$. Cela définit une relation d'équivalence sur l'ensemble des atlas d'un espace localement annelé. Un **espace analytique** est un espace localement annelé muni d'une classe d'équivalence d'atlas.

Sauf mention contraire lorsque nous parlerons d'un atlas d'un espace analytique ce sera toujours un élément de cette classe d'équivalence.

Remarque 2.5.

— Soit $\mathcal{U}_1$ et $\mathcal{U}_2$ deux atlas compatibles de $(X, \mathcal{O}_X)$. L'ensemble $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2$ constitué des ouverts $U_1 \cap U_2$ avec $U_1 \in \mathcal{U}_1$ et $U_2 \in \mathcal{U}_2$ et munis de l'isomorphisme d'espace annelé correspondant à l'une des deux structures (c'est à cet endroit que sert le fait que $\mathcal{U}_1$ et $\mathcal{U}_2$ soient compatible) est un atlas compatible avec les deux premiers.

— Soit U un ouvert de X. L'espace localement annelé $(U, \mathcal{O}_U)$ hérite de $(X, \mathcal{O}_X)$ d'une structure d'espace analytique.

— Si $\mathcal{A}$ est un anneau de Banach de base tel que $B := \mathcal{M}(\mathcal{A})$ vérifie le principe de prolongement analytique, grâce au théorème 1.31, on sait que pour tout espace $\mathcal{A}$-analytique $(X, \mathcal{O}_X)$, le faisceau $\mathcal{O}_X$ est cohérent.

Morphisme d'espaces $\mathcal{A}$-analytiques : Soient maintenant $(X, \mathcal{O}_X)$ et $(Y, \mathcal{O}_Y)$ deux espaces analytiques. Un **morphisme d'espaces analytiques** est un morphisme d'espaces localement annelés $\psi : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ tel que pour tout atlas $\mathcal{V}$ de $(Y, \mathcal{O}_Y)$, il existe un atlas $\mathcal{U}$ de $(X, \mathcal{O}_X)$ avec les propriétés suivantes : pour tout $V \in \mathcal{V}$ et tout $x \in \varphi^{-1}(V)$ il existe $U \in \mathcal{U}$ voisinage de x dans $\varphi^{-1}(V)$ tel que le morphisme entre espaces annelés $j_V \circ \varphi \circ j_U^{-1} : X_U \to Y_V$ soit un morphisme de sous-espaces analytiques d'ouverts d'espaces affines.

Remarque 2.6.

— En fait, pour montrer que $\psi : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ est un morphisme d'espaces analytiques, il suffit de montrer que pour un atlas $\mathcal{V}$ de $(Y, \mathcal{O}_Y)$, il existe un atlas $\mathcal{U}$ de $(X, \mathcal{O}_X)$ avec les propriétés suivantes : pour tout $V \in \mathcal{V}$ et tout $x \in \varphi^{-1}(V)$ il existe $U \in \mathcal{U}$ voisinage de x dans $\varphi^{-1}(V)$ tel que le morphisme entre espaces annelés $j_V \circ \varphi \circ j_U^{-1} : X_U \to Y_V$ soit un morphisme de sous-espaces analytiques d'ouverts d'espaces affines.

En effet, soit $\mathcal{V}'$ un autre atlas de $(Y, \mathcal{O}_Y)$. Il suffit de montrer qu'il existe un atlas $\mathcal{U}'$ vérifiant la condition requise pour l'atlas $\mathcal{V} \cap \mathcal{V}'$. Soient $V = V_1 \cap V_2$ un élément de $\mathcal{V} \cap \mathcal{V}'$ et $x \in \varphi^{-1}(V)$. Il existe $U \in \mathcal{U}$ voisinage de x dans $\varphi^{-1}(V_1)$ tel que le morphisme entre espaces annelés $j_{V_1} \circ \varphi \circ j_U^{-1} : X_U \to Y_{V_2}$ soit un morphisme de sous-espaces analytiques d'ouverts d'espaces affines. Maintenant grâce à la remarque 2.2

le morphisme $j_{V_1} \circ \varphi \circ j_U^{-1} : j_U(U \cap \varphi^{-1}(V_2)) \to Y_{V_2}$ est un morphisme de sous-espaces analytiques d'ouverts d'espaces affines. Ainsi l'ouvert $U \cap \varphi^{-1}(V_2)$ convient.

— De même que dans le cas d'un morphisme entre sous-espaces analytiques d'ouverts d'espaces affines, la notion de morphisme d'espaces analytiques est locale à la source et au but.

Proposition 2.7. *Soient $(\varphi, \varphi^{\#}) : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ un morphisme entre sous-espaces analytiques d'ouverts d'espaces affines et x un point de X. Le morphisme de corps allant de $\kappa(\varphi(x))$ dans $\kappa(x)$ induit par $\varphi^{\#}$ est une isométrie pour les normes naturelles des deux corps.*

Démonstration de la proposition. On note

$$(j_U, j_U^{\#}) : (X, \mathcal{O}_X) \to (U, \mathcal{O}_U) \text{ et}$$
$$(j_V, j_V^{\#}) : (Y, \mathcal{O}_Y) \to (V, \mathcal{O}_V)$$

les deux immersions fermées correspondant au sous-espaces analytiques d'ouverts d'espaces affines. Quitte à rétrécir de nouveau U et V (et par la même X et Y) on peut supposer qu'il existe un diagramme commutatif de morphismes d'espaces localement annelés :

$$\begin{tikzcd}
(U, \mathcal{O}_U) \arrow[r, "\tilde{\varphi}"] & (V, \mathcal{O}_V) \\
(X, \mathcal{O}_X) \arrow[u, hook, "j_U"] \arrow[ur, "j_V \circ \varphi"'] &
\end{tikzcd}$$

où $\tilde{\varphi}$ est un morphisme entre ouverts d'espaces affines.

Ainsi il suffit de démontrer l'énoncé dans le cas où X et Y sont des ouverts d'espaces affines. C'est alors une conséquence de la proposition 2.3. □

Remarque 2.8. Grâce à la proposition précédente, pour tout point x d'un espace analytique X on peut munir sans ambiguïté $\kappa(x)$ d'une valeur absolue. On notera $\mathscr{H}(x)$ le complété correspondant.

Proposition 2.9. *L'identité est un morphisme d'espaces analytiques. La composé de deux morphismes d'espaces analytiques est un morphisme d'espaces analytiques.*

Démonstration de la proposition. Soit X un espace analytique.

Grâce à la remarque 2.6, pour montrer que l'identité Id_X est un morphisme d'espaces analytiques pour tout espace analytique, il suffit de le montrer dans le cas où X est un sous-espace analytique d'un ouvert d'un espace affine. Or dans ce cas l'énoncé découle de la définition.

Montrons maintenant que la composée de deux morphismes d'espaces analytiques est un morphisme d'espaces analytiques.

Soit $(\varphi, \varphi^{\#}) : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ et $(\psi, \psi^{\#}) : (Y, \mathcal{O}_Y) \to (Z, \mathcal{O}_Z)$ deux morphismes d'espaces analytiques. Soit $\mathcal{W}$ un atlas de $(Z, \mathcal{O}_Z)$. Par définition, il existe un atlas $\mathcal{V}$ de Y tel que pour $W \in \mathcal{W}$ et $x \in \psi^{-1}(W)$, il existe un voisinage $V \in \mathcal{V}$ de x dans $\psi^{-1}(W)$

tel que $j_W \circ \psi \circ j_V^{-1} : Y_V \to Z_W$ soit un morphisme de sous-espaces analytiques d'ouverts d'espaces affines. Toujours par définition, il existe un atlas $\mathcal{U}$ de X vérifiant la même propriété que ci-dessus pour φ et $\mathcal{V}$. Du fait que la composé de deux morphismes de sous-espaces analytiques d'ouverts d'espaces affines est un morphisme de sous-espaces analytiques d'ouverts d'espaces affines, les atlas $\mathcal{U}$ et $\mathcal{W}$ conviennent pour donner une structure de morphisme d'espaces analytiques à $((\psi \circ \varphi), (\psi \circ \varphi)^{\#}) : (X, \mathcal{O}_X) \to (Z, \mathcal{O}_Z)$. □

Nous pouvons maintenant définir la catégorie des espaces analytiques sur un anneau de Banach $\mathcal{A}$ dont les objets sont les espaces $\mathcal{A}$-analytiques et dont les morphismes sont les morphismes d'espaces analytiques. Nous noterons $An_{\mathcal{A}}$ cette catégorie. Lorsque cela ne portera pas à confusion nous parlerons d'espace analytique et de morphisme d'espaces analytiques en omettant de préciser $\mathcal{A}$.

On peut munir $An_{\mathcal{A}}$ de la topologie de Grothendieck *Ouv* engendrée par les recouvrements ouverts. Par définition, le foncteur

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{Hom}_{An_{\mathcal{A}}}(.,Y) : & An_{\mathcal{A}} & \to & Ens \\ & X & \mapsto & \mathrm{Hom}_{An_{\mathcal{A}}}(X,Y) \end{array}$$

est un faisceau pour la topologie *Ouv*.

2.2 Catégorie des espaces analytiques au-dessus de $\mathcal{A}$

Nous allons maintenant définir une catégorie plus grande que $An_{\mathcal{A}}$ qui va nous permettre de procéder à des extensions des scalaires.

Un **espace analytique au-dessus de $\mathcal{A}$** est la donné d'un morphisme borné d'algèbres de Banach $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$ et d'un espace $\mathcal{B}$-analytique. Remarquons que cela donne à tout espace $\mathcal{B}$-analytique une structure d'espace localement $\mathcal{A}$-annelé.

Soient $f : \mathcal{B} \to \mathcal{B}'$ un morphisme de $\mathcal{A}$-algèbres, X un espace $\mathcal{B}'$-analytique et Y un espace $\mathcal{B}$-analytique. Le morphisme f donne à l'espace $\mathcal{B}'$-analytique X une structure d'espace analytique au-dessus de $\mathcal{B}$ (et donc une structure d'espace localement $\mathcal{B}$-annelé). De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce morphisme induit un morphisme d'espaces localement annelé $\tilde{f}_n : \mathbb{A}^n_{\mathcal{B}'} \to \mathcal{A}^n_{\mathcal{B}}$ qui plus est il y a deux morphismes naturels $(\mathcal{M}(\mathcal{B}), \mathcal{O}_{\mathcal{M}(\mathcal{B})}) \to \mathbb{A}^n_{\mathcal{B}'}$ et $(\mathcal{M}(\mathcal{B}), \mathcal{O}_{\mathcal{M}(\mathcal{B})}) \to \mathbb{A}^n_{\mathcal{B}}$ faisant commuter le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} \mathbb{A}^n_{\mathcal{B}'} \arrow[r] & \mathbb{A}^n_{\mathcal{B}} . \\ (\mathcal{M}(\mathcal{B}), \mathcal{O}_{\mathcal{M}(\mathcal{B})}) \arrow[u] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Nous dirons que $\tilde{f}_n$ est un morphisme d'espaces $\mathcal{B}$-analytiques.

Nous allons maintenant définir la notion de morphisme d'espaces analytiques au-dessus de f allant d'un espace $\mathcal{B}'$-analytique vers un espace $\mathcal{B}$-analytique. Pour cela nous allons procéder de la même manière que pour les morphismes d'espaces $\mathcal{A}$-analytiques. Nous allons dans un premier temps définir ce que sont les morphismes au-dessus de f allant d'un ouvert d'espace affine au-dessus de $\mathcal{B}'$ vers un ouvert d'espace affine au-dessus de $\mathcal{B}$, puis donner une définition dans le cas général.

Soit U un ouvert de $\mathbb{A}^n_{\mathcal{B}'}$ et V un ouvert de $\mathbb{A}^m_{\mathcal{B}}$. Nous dirons qu'un morphisme d'espaces localement $\mathcal{B}$-annelés $\varphi : U \to V$ est un **morphisme entre ouverts d'espaces affines au-dessus de** f si pour tout point $x \in U$, et tout voisinage compact V' de $\varphi(x)$ dans V, il existe un voisinage compact U' de x dans U tel que $\varphi(U')$ soit inclus dans V' et le morphisme $\varphi^\# : \mathcal{O}_V(V') \to \mathcal{O}_U(U')$ soit borné (*i.e.* pour tout $a \in \mathcal{O}_V(V')$ on a l'inégalité $\|\varphi^\#(a)\|_{U'} \leq \|a\|_{V'}$).

Exemple 2.10. Le morphisme $\tilde{f}_n$ évoqué plus haut est un morphisme entre ouverts d'espaces affines au-dessus de f. Cela provient simplement du fait que le morphisme f est borné.

Nous dirons qu'un morphisme d'espaces localement $\mathcal{B}$-annelés $X \to Y$ est un **morphisme d'espaces analytiques au-dessus de** f si pour tout $x \in X$ il existe une carte (*i.e.* une immersion fermée dans un ouvert d'un espace affine) $i_U : U \to \tilde{U}$ au-dessus de $\mathcal{B}'$ (où $\tilde{U}$ est un ouvert d'un espace affine au-dessus de $\mathcal{B}'$) au voisinage de x et une carte $i_V : V \to \tilde{V}$ au-dessus de$\mathcal{B}$ (où $\tilde{V}$ est un ouvert d'un espace affine au-dessus de $\mathcal{B}$) au voisinage de $\varphi(x)$ telles que $\varphi(U)$ soit inclus dans V et telles que le morphisme $i_V \circ \varphi$ s'étende à $\tilde{U}$ en un morphisme d'espaces analytiques au-dessus de f entre ouverts d'espaces affines.

On note $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}-An,f}(X,Y)$ l'ensemble de ces morphismes.

Remarque 2.11.

- Il découle de la définition que tout morphisme d'espaces analytiques au-dessus de f entre ouverts d'espaces affines est un morphisme d'espaces analytiques au-dessus de f.
- De plus, soient $f : \mathcal{B} \to \mathcal{B}'$ et $f' : \mathcal{B}' \to \mathcal{B}''$ deux morphismes bornés de $\mathcal{A}$-algèbres de Banach et $\varphi : X \to Y$ un morphisme d'espaces analytiques au-dessus de f' et $\varphi' : Y \to Z$ un morphisme d'espaces analytiques au-dessus de f. Le morphisme $\varphi' \circ \varphi : X \to Z$ est un morphisme d'espaces analytiques au-dessus de $f' \circ f$. Ce résultat se démontre la même manière que la proposition 2.9. De même, l'identité d'un espace $\mathcal{B}$-analytique X au-dessus de $\mathcal{A}$ est un morphisme d'espaces analytiques au-dessus de $Id_{\mathcal{B}}$.

On note $\mathcal{A} - An$ la catégorie dont les objets sont les espaces analytiques au-dessus de $\mathcal{A}$ et pour tout espace $\mathcal{B}'$-analytique X et tout espace $\mathcal{B}$-analytique Y l'ensemble des morphismes de X dans Y est l'ensemble $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}-An}(X,Y) := \bigcup_f \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}-An,f}(X,Y)$, où l'union est prise sur l'ensemble des morphismes bornés d'algèbres de Banach $f : \mathcal{B} \to \mathcal{B}'$.

2.3 Notion d'immersions d'espaces analytiques

Revenons maintenant à la catégorie des espaces $\mathcal{A}$-analytiques $An_{\mathcal{A}}$. Nous omettrons de préciser le $\mathcal{A}$ pour la fin de cette section.

Définition 2.12. Soit $(X, \mathcal{O}_X)$ un espace analytique.

— Soit $\mathcal{I}$ un faisceau cohérent d'idéaux sur $(X, \mathcal{O}_X)$. Nous notons $N(\mathcal{I})$ le support du faisceau $\mathcal{O}_X/\mathcal{I}$. On note i l'inclusion naturelle de $N(\mathcal{I})$ dans X.

— Un **sous-espace analytique de** $(X, \mathcal{O}_X)$ est un sous-espace localement annelé $(Y, \mathcal{O}_Y)$ tel qu'il existe un faisceau cohérent d'idéaux $\mathcal{I}$ de $\mathcal{O}_X$ avec $N(\mathcal{I})$ égal à Y et $\mathcal{O}_Y \simeq i_*(\mathcal{O}_X/\mathcal{I})$.

Remarque 2.13. L'espace localement annelé $(N(\mathcal{I}), i_*(\mathcal{O}_X/\mathcal{I}))$ est naturellement un espace analytique avec pour atlas les restrictions des atlas de $(X, \mathcal{O}_X)$.

Nous allons maintenant définir trois classes de morphismes qui vont nous être particulièrement utiles par la suite.

Définition 2.14. Soit $\varphi : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ un morphisme entre espaces analytiques. Nous dirons que φ est :

— une **immersion ouverte** s'il induit un isomorphisme d'espaces analytiques entre $(X, \mathcal{O}_X)$ et un ouvert de $(Y, \mathcal{O}_Y)$ (qui a naturellement une structure d'espace analytique d'après la remarque 2.5) ;

— une **immersion fermée** s'il induit un isomorphisme entre $(X, \mathcal{O}_X)$ et un sous-espace analytique de $(Y, \mathcal{O}_Y)$;

— une **immersion** s'il est égale à $\varphi_1 \circ \varphi_2$ avec φ_1 une immersion ouverte et φ_2 une immersion fermée.

Remarque 2.15. Soit $(X, \mathcal{O}_X)$ un espace analytique.

— Soit U un ouvert de X, l'inclusion $(U, \mathcal{O}_U) \to (X, \mathcal{O}_X)$ induit une immersion ouverte d'espaces analytiques.

— Soit $(Y, \mathcal{O}_Y)$ un sous-espace analytique de $(X, \mathcal{O}_X)$, le morphisme d'espaces localement annelés $(i, i^{\#}) : (Y, \mathcal{O}_Y) \to (X, \mathcal{O}_X)$ induit une immersion fermée d'espaces analytiques.

— Soient $\varphi : X \to Y$ un morphisme d'espaces analytiques et $i : Z \to Y$ une immersion fermée. Le morphisme φ se factorise par i en tant que morphisme d'espaces analytiques si et seulement si il se factorise par i en tant que morphisme d'espaces localement annelés.

En effet, il suffit pour remarquer cela de montrer que s'il se factorise en tant que morphisme d'espaces localement annelés il se factorise en tant que morphisme d'espaces analytiques (l'autre implication est juste une conséquence de la définition de morphisme d'espaces analytiques).

On note $\varphi' : X \to Z$ l'unique morphisme d'espaces localement annelés tel que la composée $i \circ \varphi'$ soit égal à φ. Il nous faut montrer que φ' est bien un morphisme d'espaces analytiques. La question est locale, nous pouvons donc supposer que X

et Y sont des sous-espaces analytiques d'ouverts U et V d'espaces affines. Puisque le morphisme d'espaces localement annelés φ est un morphisme d'espaces analytiques, quitte à prendre U et V suffisamment petit, nous pouvons supposer qu'il existe une extension $\tilde{\varphi} : U \to V$ de φ.
L'espace analytique Z s'identifiant à un sous-espace analytique de X c'est un sous-espace analytique de V. Puisque le morphisme $\tilde{\varphi}$ est une extension de φ', φ' est bien un morphisme d'espaces analytiques.

— Soit $f \in \mathcal{O}_X(X)$ une section. L'évalution en norme $|f| : X \to \mathbb{R}_+^*$ est une fonction continue. C'est une simple conséquence du même fait sur les espaces affines. En particulier, l'ensemble $\{x \in X | \ s < |f(x)| < t\}$ est un ouvert de X pour tout couple $0 \leq s < t$.

Finissons cette partie avec trois propositions sur les immersions.

Proposition 2.16. *Soient $(i, i^{\#}) : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ une immersion fermée d'espaces analytiques correspondant au faisceau d'idéaux $\mathcal{I}$ et $(\varphi, \varphi^{\#}) : (Z, \mathcal{O}_Z) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ un morphisme d'espaces analytiques. Il y a équivalence entre les deux énoncés suivants :*

— *Le morphisme $(\varphi, \varphi^{\#})$ se factorise en tant que morphisme d'espaces analytiques par $(i, i^{\#})$.*

— *Le faisceau $\varphi^*(\mathcal{I})$ est nul.*

Démonstration de la proposition. Supposons dans un premier temps que $(\varphi, \varphi^{\#})$ se factorise par $(i, i^{\#})$. Il existe un morphisme $(\varphi', \varphi'^{\#}) : (Z, \mathcal{O}_Z) \to (X, \mathcal{O}_X)$ tel que la composée $(i, i^{\#}) \circ (\varphi', \varphi'^{\#})$ est égale à $(\varphi, \varphi^{\#})$. Ainsi on a la suite d'égalité

$$\varphi^*(\mathcal{I}) = \varphi'^*(i^*(\mathcal{I})) = \varphi'^*(0) = 0.$$

Supposons maintenant que $\varphi^*(\mathcal{I})$ soit nul. Le morphisme $(\varphi, \varphi^{\#})$ se factorise par $(i, i^{\#})$ comme morphisme d'espaces localement annelés et donc en tant que morphisme d'espaces analytiques (voir le troisième point de la remarque 2.15). $\square$

Proposition 2.17. *Soit $(i, i^{\#}) : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ une immersion d'espaces analytiques. Il y a équivalence entre les deux énoncés suivants :*

— *le morphisme $(i, i^{\#})$ est une immersion fermée ;*

— *l'image de i est fermée dans Y.*

De même, il y a équivalence entre les deux énoncés suivants :

— *le morphisme $(i, i^{\#})$ est une immersion ouverte ;*

— *l'image de i est ouverte dans Y.*

Démonstration de la proposition. Concentrons-nous sur la première partie, la seconde étant évidente. Pour cela, il suffit de montrer que si l'image de $(i, i^{\#})$ est fermée dans Y, $(i, i^{\#})$ est une immersion fermée (l'autre sens étant évident).

Pour montrer cela, il suffit de montrer que l'image de X par i est un sous-espace analytique de Y. En effet, puisque $(i, i^{\#})$ est une immersion il induit un isomorphisme avec son image (qui est naturellement un espace analytique comme sous-espace analytique d'un ouvert Y).

Par hypothèse X s'identifie à un sous-espace analytique d'un ouvert U de Y. On note $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_Y$ le noyaux du morphisme $i^{\#} : \mathcal{O}_Y \to i_*(\mathcal{O}_X)$. Nous allons montrer que ce faisceau est cohérent et que $i(X)$ est le support de $\mathcal{O}_Y/\mathcal{I}$.

Commençons par le second point. Par définition de $\mathcal{I}$, $i(X)$ est inclus dans $\mathcal{O}_Y/\mathcal{I}$. Passons donc à l'inclusion inverse. Soit $y \in Y$ n'appartenant pas à $i(X)$. Puisque cet ensemble est fermé, il existe un voisinage ouvert V de y dans $Y \backslash i(X)$. L'algèbre $i_*(\mathcal{O}_X)(V)$ est donc nulle. Ce qui implique que l'algèbre $\mathcal{O}_{Y,y}/\mathcal{I}_y$ est nulle. Ainsi y n'appartient pas au support de $\mathcal{O}_Y/\mathcal{I}$.

Montrons maintenant que $\mathcal{I}$ est un faisceau cohérent. Soit $y \in Y$. Si y n'appartient pas à $i(X)$. il existe un voisinage ouvert V de y dans Y disjoint de $i(X)$. Le faisceau $\mathcal{I}_{|V}$ est engendré par la fonction unité. Si y appartient à $i(X)$, il appartient à U. Ainsi, il existe un voisinage V de y dans U tel que $\mathcal{I}_{|V}$ soit engendré par n fonctions $f_1, \ldots, f_n$ appartenant à $\mathcal{O}_V(V)$. Ce qui implique que $\mathcal{I}$ est un faisceau cohérent. $\square$

Proposition 2.18. *Soit $(i, i^{\#}) : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ un morphisme d'espaces analytique. Les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

- *pour tout $y \in i(X)$, il existe un voisinage ouvert de V de y dans Y tel que la restriction $(i, i^{\#}) : (i^{-1}(V), \mathcal{O}_{i^{-1}(V)}) \to (V, \mathcal{O}_V)$ soit une immersion fermée ;*
- *le morphisme $(i, i^{\#}) : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ est une immersion.*

Démonstration de la proposition. Il suffit de montrer que la première condition entraine la seconde (l'autre sens étant évident).

Soit $y \in i(X)$. Par hypothèse, il existe un voisinage V_y de y dans Y tel que $(i, i^{\#})$ induise un isomorphisme entre $(i^{-1}(V_y), \mathcal{O}_{i^{-1}(V_y)})$ est un sous-espace analytique $(U_y, \mathcal{O}_{U_y})$ de $(V_y, \mathcal{O}_{V_y})$. On note $V := \cup_{y \in i(X)} V_y$. Il nous faut montrer que $(i, i^{\#})$ induit un isomorphisme entre $(i^{-1}(V), \mathcal{O}_{i^{-1}(V)})$ est un sous-espace analytique de $(V, \mathcal{O}_V)$. On note $\mathcal{I}$ le noyaux du morphisme $i^{\#} : \mathcal{O}_V \to \mathcal{O}_{i^{-1}(V)}$. Le faisceau $\mathcal{I}$ est cohérent. En effet, pour tout $y \in Y$ le faisceau d'idéaux $\mathcal{I}_{|V_y}$ est le faisceau d'idéaux de définition de $(U_y, \mathcal{O}_{U_y})$.

On note $(U, \mathcal{O}_U)$ le sous-espace analytique de $(V, \mathcal{O}_V)$ défini par le faisceau d'idéaux $\mathcal{I}$. Pour tout $y \in U$, il existe un voisinage U_y et un morphisme d'espaces analytiques

$$(j_y, j_y^{\#}) : (U_y, \mathcal{O}_{U_y}) \to (i^{-1}(U_y), \mathcal{O}_{i^{-1}(U_y)})$$

tel que l'on ai les deux égalités suivantes

$$(j_y, j_y^{\#}) \circ (i, i^{\#}) = Id_{i^{-1}(U_y)} \text{ et } (i, i^{\#}) \circ (j_y, j_y^{\#}) = Id_{U_y}$$

où l'on note encore $(i, i^{\#})$ la restriction sa restriction à $i^{-1}(U_y)$. Par unicité de l'inverse, on peut recoller ces morphismes en $(j, j^{\#}) : (U, \mathcal{O}_U) \to (X, \mathcal{O}_X)$. Ainsi $(i, i^{\#})$ induit un isomorphisme entre $(X, \mathcal{O}_X)$ et un sous-espace analytique de $(V, \mathcal{O}_V)$, c'est donc une immersion. $\square$

Chapitre 3

Résultat de fermeture des idéaux

Dans ce chapitre, nous allons montrer un résultat de fermeture des idéaux qui sera indispensable dans la construction de la catégorie des espaces analytiques (voir la démonstration du théorème 4.3). Ce résultat pourra aussi être utile pour construire une bonne théorie d'espace de Stein sur un anneau de Banach.

Nous allons, dans un premier temps, nous attarder sur la description de base de voisinages des points de l'espace affine. Dans un deuxième temps nous redémontrerons un théorème division de Weierstraß du type de celui démontré dans le Théorème 8.3 de [Poi13] en y ajoutant un contrôle sur la norme du quotient et du reste. Ce résultat nous permettra d'en déduire les mêmes résultats que J. Poineau en gardant un contrôle sur les normes des objets mis en jeu.

Enfin tout ces résultats permettrons de montrer à la fin du chapitre que tous les idéaux de l'anneau des germes de fonctions analytiques au voisinage d'un point de $\mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}$ sont fermés (en un sens à préciser) lorsque $\mathcal{A}$ vérifie certaines hypothèses techniques un peu plus restrictives que les anneaux de base (qui sont vérifiées, entre autre, par les anneaux d'entiers de corps de nombres munis de leur norme usuelle). De tel anneau seront appelé anneau de base géométrique.

3.1 Description des bases de voisinages

Dans cette section, $\mathcal{A}$ sera, *a priori*, un anneau de Banach quelconque.

Commençons par donner une démonstration plus détaillée de la proposition 6.7 de [Poi13]. Cette proposition donne pour chaque point x de $\mathbb{A}^1_{\mathcal{A}}$ une description agréable d'une base de voisinages de x qui nous sera très utile par la suite pour effectuer des raisonnements par récurrence sur la dimension.

Proposition 3.1. *Soit x appartenant à $\mathbb{A}^1_{\mathcal{A}}$ et soit $\mathcal{V}$ une base de voisinages de $\pi(x)$. Il existe une base de voisinages formée d'ensembles de la forme $D_U(P, s, t)$ où U appartient à $\mathcal{V}$ et P est un polynôme à coefficients dans $\mathcal{A}$.*

Démonstration de la proposition. Elle se fera en étudiant successivement plusieurs cas :

- *Si $\mathcal{A}$ est un corps archimédien.*

L'énoncé découlant du fait que $\mathbb{A}^1_{\mathcal{A}}$ est égale à $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{C}$ quotienté par la conjugaison complexe si $\mathcal{A}$ est un corps archimédien.

• *Si $\mathcal{A}$ est un corps non archimédien algébriquement clos.*

Pour des raison psychologique, nous poserons $k := \mathcal{A}$ dans ce cas là.

Supposons que x est un point de type 1. Nous savons alors qu'il existe $\alpha \in k$ tel que x corresponde à l'évaluation en α. Ainsi les ensembles de la forme $D(\alpha; r)$, avec r appartenant à $\mathbb{R}^{+,*}$, forment une base de voisinages de x.

Mettons-nous dans le cas où x est un point de type 4. Il existe une suite $(\eta_{\alpha_i,r_i})_{i\in\mathbb{N}}$ tels que les boules de k correspondantes soient d'intersection vide. Il est, alors, aisé de constater que la suite de voisinages $(D(\alpha_i, r_i))_{i\in\mathbb{N}}$ forme une base de voisinages de x.

Nous allons, à présent, traiter le cas des points de type 2 et 3 simultanément.

Nous sommes donc dans le cas où x est un point du type $\eta_{\alpha,r}$ avec $\alpha \in k$ et $r \in \mathbb{R}^+_*$. La description de $\mathbb{A}^1_k$ en terme d'espace des boules de k permet d'affirmer que les ensembles $D(\alpha_0, t)/(\cup_{i=1}^n D(\alpha_i, s_i))$ avec $\alpha_0 = \alpha$, $t > r$, $|\alpha_0 - \alpha_j| < r$ et $s_i < r$, forment une base de voisinage de x. Il suffit donc de montrer que pour tout voisinage de la forme $D(\alpha_0, t)/(\cup_{i=1}^n D(\alpha_i, s_i))$, il existe un sous-voisinage de x de la forme souhaitée.

On pose $P = \Pi_{i=0}^n (T - \alpha_i)$. On note Γ_P l'arbre de variation de P (pour une définition voir par exemple le point 3.4.24.2 de [Duc]). Cette arbre est le plus petit contenant toute les racines de P et ∞, il contient en particulier $x = \eta_{\alpha,r}$. En dehors de Γ_P l'application $x \mapsto |P(x)|$ est localement constante. Elle est strictement croissante une fois restreinte à Γ_P (où Γ_P est muni de la relation d'ordre induite par celle de $\mathbb{A}^1_k$). Ainsi, il existe deux réels $t' > |P(x)| > s' \geq 0$ tel que $\{y \in \Gamma_P | s' < |P(y)| < t'\}$ soit inclus dans $(D(\alpha_0, t)/(\cup_{i=1}^n D(\alpha_i, s_i))) \cap \Gamma_P$.

Cela implique que $D(P; s', t')$ est inclus dans $D(\alpha_0, t)/(\cup_{i=1}^n D(\alpha_i, s_i))$. En effet, si y appartient à $D(\alpha_i, s_i)$, alors $|P(y)|$ est inférieur ou égale à $|P(\eta_{\alpha_i,s_i})|$. Or η_{α_i,s_i} appartient à Γ_P donc $|P(y)|$ est inférieur ou égale à s'. Si y n'appartient pas à $D(\alpha_0, t)$, il existe un unique chemin ℓ reliant y à Γ_P tel que l'intersection $\ell \cap \Gamma_P$ soit réduite à un point. On note γ_y ce point et par la suite nous ferons référence à ce point comme le **point d'incidence de y en Γ_P**. Le point γ_y est suppérieur ou égale à y pour la relation d'ordre usuelle de $\mathbb{A}^1_k$. Donc γ_y n'appartient pas à $D(\alpha_0, t)$. Mais, puisque l'application $x \mapsto |P(x)|$ est localement constante en dehors de Γ_P, nous avons l'égalité $|P(y)| = |P(\gamma_y)|$. Ainsi nous avons l'inégalité souhaitée $|P(y)| \geq t'$.

• *Si $\mathcal{A}$ est un corps non archimédien quelconque.*

Une fois de plus nous remplacerons $\mathcal{A}$ par k dans la suite. On notera p la caractéristique de k. On sait que $\mathbb{A}^1_k \simeq \mathbb{A}^1_{\hat{\overline{k}}}/Gal_k(\overline{k})$.

Soit $x \in \mathbb{A}^1_k$. On note encore x un antécédent de x par l'application naturel $i : \mathbb{A}^1_{\hat{\overline{k}}} \to \mathbb{A}^1_k$. D'après ce que nous avons démontré x admet une base de voisinages formée d'ensembles de la formes $D(P; s, t)$ avec P à coefficient dans $\hat{\overline{k}}$. Par densité, on peut choisir cette base de voisinages de telle sorte que P soit à coefficient dans $\overline{k}$. Puisque l'application i est ouverte, il suffit de montrer que pour tout voisinage de x, $D(P; s, t)$ avec P à coefficient dans $\overline{k}$, il existe un polynôme P' à coefficient dans k et $t' > s' \geq 0$ tel que $D(P'; s', t')$ soit un voisinage de x dans $i(D(P; s, t))$.

Soient P un tel polynôme, G_P le groupe de Galois d'une clôture normale K de l'extension $k|k[\alpha_0, \ldots, \alpha_n]$ et $\tilde{P}$ le polynôme égale au produit des $g(P)$ pour g appartenant à G_P. Enfin on note P' le polynôme appartenant à $k[T]$ qui est égal à la puissance p^l-ème de $\tilde{P}$ (avec l convenablement choisi dont l'existence est garantie par le fait que l'extension $k|K^{G_P}$ est radicielle où K^{G_P} est l'ensemble des éléments de K invariants par G_P).

Nous allons,maintenant, montrer qu'il existe $t' > |P'(x)| > s' \geq 0$ tel que $D(P'; s', t')$ soit inclus dans $i(D(P; s, t))$. On note Γ_P et $\Gamma_{P'}$ les graphes de variations de P et P' dans $\mathbb{A}^1_{\hat{\overline{k}}}$. On note maintenant γ_x le point d'incidence de x en $\Gamma_{P'}$. Par construction de P' nous avons l'égalité $\cup_{g \in G_P}(g(\Gamma_P) = \Gamma_{P'}$. On pose $V := \cup_{g \in G_P} g(D(P; s, t)) \cap \Gamma_{P'}$. Par construction, V est un voisinage de γ_x dans $\Gamma_{P'}$. Ainsi il existe $t' > |P'(x)| > s' \geq 0$ tel que $D(P'; s', t') \cap \Gamma_{P'}$ soit inclus dans V. De la même manière que dans la partie précédente nous pouvons montrer que cela implique $D(P'; s', t')$ est inclus dans $\cup_{g \in G_P} g(D(P; s, t))$ et donc que $D(P'; s', t')$ est inclus dans $i(D(P; s, t))$.

- *Si $\mathcal{A}$ est un anneau de Banach quelconque*

Soit U un voisinage de x dans $\mathbb{A}^1_{\mathcal{A}}$. Par ce qui précède il existe $P \in \mathscr{H}(b)[T]$ tel que :

$$x \in \{y \in \mathbb{A}^1_{\mathscr{H}(b)} | s \leq |P(y)| \leq t\} \subset U \cap \mathbb{A}^1_{\mathscr{H}(b)}.$$

Par densité on peut prendre P à coefficient dans $\kappa(b)$ c'est donc un polynôme dont les coefficients sont limites uniformes de fractions d'élément de $\mathcal{A}$. Pour la même raison que précédement, on peut donc se ramener au cas où P est à coefficient dans l'anneau total des fractions de $\mathcal{A}$. Quitte à multiplier par un élément de $\mathcal{A}$ on peut donc se ramener au cas où P est à coefficients dans $\mathcal{A}$.

On conclut alors par compactié de l'ensemble $\{y \in \mathbb{A}^1_{\mathcal{A}} | s \leq |P(y)| \leq t\}$. □

Faisons dès à présent quelques remarques sur le choix de polynômes :

Remarque 3.2. Soit $x \in \mathbb{A}^1_{\mathcal{A}}$:

— Si x est rigide épais, il correspond à un polynôme irréductible unitaire $\tilde{Q}$ à coefficients dans $\kappa(\pi(x))$. Il existe un voisinage compact spectralement convexe U_x de $\pi(x)$ sur lequel chacun des coefficients de $\tilde{Q}$ peuvent être relevés. On note Q un tel relèvement. Dans ce cas il est aisé de montrer que x admet une base de voisinages constitué d'éléments de la forme $D_U(Q, t)$ avec U inclus dans U_x.

— Si $b := \pi(x)$ est tel que $\mathscr{H}(b)$ n'est pas trivialement valué, nous pouvons choisir P de telle sorte que $Q(b) \in \kappa(b)[T]$ soit un polynôme séparable. Si de plus x est rigide, pour tout couple $\epsilon, r > 0$, on peut choisir ce polynôme de telle sorte qu'il soit de même degré que le polynôme Q et tel que $\|P - Q(b)\|_{\mathscr{H}(b)\langle|T| \leq r\rangle} \leq \epsilon$ et $t \leq \epsilon$.

— Dans le cas où $\mathscr{H}(b)$ est trivialement valué et de caractéristique nulle, la situation est plus simple. On peut aussi choisir Q de manière à ce que $Q(b) \in \kappa(b)[T]$ soit un polynôme séparable. En effet, si x est un point rigide, il est rigide épais et donc le premier point de cette remarque assure que l'on peut choisir Q de telle sorte que $Q(b)$ soit irréductible et donc séparable. Soit x est un point de type 3. Grâce à la description explicite de la droite analytique sur $\mathscr{H}(b)$, il existe $\tilde{Q} \in \kappa(b)[T]$ irréductible et donc séparable tel que x admette une base de voisinages dans $\mathbb{A}^1_{\mathscr{H}(b)}$ de la forme $D(\tilde{Q}; s, t)$. Enfin, si x est le point de Gauss, x admet admet une base de voisinage dans $\mathbb{A}^1_{\mathscr{H}(b)}$ de la forme $D(\tilde{Q}; s, t)$ avec $\tilde{Q} := \prod_{i=1}^d \tilde{Q}_i$ où les Q_i sont des polynômes irréductibles tous différents. En particulier, $\tilde{Q}$ est séparable.

Soit G un polynôme unitaire à coefficients dans $\mathcal{A}$. On introduit les normes suivantes :

— Il y a un $\mathcal{A}$-isomorphisme naturel entre $\mathcal{A}[T]/(G(T))$ et $\mathcal{A}^d$ défini de la manière suivante :
$$\begin{array}{cccc} n : & \mathcal{A}^d & \to & \mathcal{A}[T]/(G(T)) \\ & (a_0, \ldots, a_{d-1}) & \mapsto & \sum\limits_{i=0}^{d-1} a_i T^i \end{array}$$
On notera $\|.\|_{\mathcal{A},div}$ la norme qui à un élément $F \in \mathcal{A}[T]/(G(T))$ associe $\|n^{-1}(F)\|_{\mathcal{A}^d}$, où la norme de $\mathcal{A}^d$ est le maximum des normes de chacune de ses coordonnées.

— Soit w un réel strictement positif. On notera $\|F\|_{\mathcal{A},w,rés}$ la semi-norme qui à un élément $F \in \mathcal{A}[T]/(G(T))$ associe
$$\inf\left\{\max_{0 \le i \le e} \|a_i\| w^i,\ \sum_{i=0}^{e} a_i T^i = F \bmod G,\ e \in \mathbb{N}\right\}.$$

La proposition suivante est une reformulation des Lemmes 5.2.2 et 5.2.3 de [Poi10].

Proposition 3.3. *Soient $p \in \mathbb{N}$ et $G := \sum\limits_{k=0}^{p-1} g_k T^k + T^p \in \mathcal{A}[T]$ un polynôme unitaire de degré p. Soit v un réel strictement positif tel que $\sum\limits_{k=0}^{p-1} \|g_k\|_{\mathcal{A}} v^{k-p} \le \frac{1}{2}$. Pour tout morphisme de $\mathcal{A}$-algèbres contractant $\mathcal{A} \to \mathcal{A}'$, on a les propriétés suivantes :*

1. *la semi-norme $\|.\|_{\mathcal{A}',v,rés}$ définie sur $\mathcal{A}'[T]/(G(T))$ est une norme ;*
2. *l'anneau $\mathcal{A}'[T]/(G(T))$ est un anneau de Banach pour cette norme ;*
3. *pour tout $F \in \mathcal{A}'[T]/(G(T))$ on a les inégalités :*
$$v^{-\deg(G)+1} \|F\|_{\mathcal{A}',v,rés} \le \|F\|_{\mathcal{A}',div} \le 2\|F\|_{\mathcal{A}',v,rés}.$$

Les constantes que nous donnons ne sont autres que les constantes obtenues dans la démonstration du théorème 5.2.1 de [Poi10]. Nous les donnons dans l'énoncé car elles nous seront utiles dans la démonstration du théorème 3.11.

La proposition 3.6 va nous permettre d'étudier les germes de fonctions au voisinage des points rigides en manipulant principalement les algèbres $\mathcal{B}(\overline{D}_V(r))$. La proposition 2.3 de [Poi13] nous permettra alors de nous restreindre à l'étude des algèbres $\mathcal{B}(V)\langle |T| \le r \rangle$ qui sont beaucoup plus simples à manipuler. Avant d'énoncer la proposition nous allons faire quelques remarques et définitions.

Commençons par introduire un morphisme qui sera au cœur du résultat. Considérons $Q := \sum\limits_{k=0}^{p-1} q_k T^k + T^p$ un polynôme unitaire de degré d supérieur à 1 à coefficients dans $\mathcal{A}$. Ce polynôme induit un morphisme de $\mathcal{A}$-algèbres $Q : \mathcal{A}[T] \to \mathcal{A}[T]$ qui envoie T sur Q. Soit W un sous-ensemble compact de $B := \mathcal{M}(\mathcal{A})$ et $0 \leq s < t$. Le morphisme de $\mathcal{A}$-algèrbes $\mathcal{A}[T] \to \mathcal{A}[T]$ passe au complété $Q : \mathcal{B}(\overline{D}_W(s,t)) \to \mathcal{B}(\overline{D}_W(Q; s,t))$. Soit $i : \mathcal{A}[S] \to \mathcal{B}(\overline{D}_W(Q; s,t))$ le morphisme naturel qui à un polynôme à coefficients dans $\mathcal{A}$ associe la fonction sur $\mathbb{A}^1_{\mathcal{A}}$ correspondante restreinte à $\overline{D}_W(Q; s,t)$. Le principe du prolongement analytique assure que ce morphisme est une injection. On considère maintenant le produit tensoriel de ces deux morphismes

$$(Q,i) : \mathcal{B}(\overline{D}_W(s,t)) \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{A}[S] \simeq \mathcal{B}(\overline{D}_W(s,t))[S] \to \mathcal{B}(\overline{D}_W(Q; s,t)).$$

Puisque $(Q,i)(Q(S) - T) = 0$, ce morphisme se factorise par $\mathcal{B}(\overline{D}_W(s,t))[S]/(Q(S) - T)$. Pour un v tel que $\sum_{k=0}^{p-1} \|q_k\|_{\mathcal{A}} v^{k-p} \leq \frac{1}{2}$, les normes $\|.\|_{\mathcal{B}(\overline{D}_W(s,t)),v,rés}$ et $\|.\|_{\mathcal{B}(\overline{D}_W(s,t)),div}$ sont équivalentes. On munit $\mathcal{B}(\overline{D}_W(s,t))[S]/(Q(S) - T)$ de l'une de ces deux normes et $\mathcal{B}(\overline{D}_W(Q; s,t))$ de la norme uniforme (ce sont des algèbres de Banach pour ces normes).

Sous certaines conditions sur W, s, t et Q le morphisme

$$(Q,i) : \mathcal{B}(\overline{D}_W(s,t))[S]/(Q(S) - T) \to \mathcal{B}(\overline{D}_W(Q; s,t))$$

est un isomorphisme d'algèbres de Banach.

Remarque 3.4. Il va nous être utile par la suite de comprendre qu'elle est l'image et l'antécédent d'un polynôme à coefficients dans $\mathcal{B}(W)$ par le morphisme

$$(Q,i) : \mathcal{B}(\overline{D}_W(s,t))[S]/(Q(S) - T) \to \mathcal{B}(\overline{D}_W(Q; s,t)).$$

Soit $P(S,T) = \sum_{j=0}^{p-1} P_j(T) S^j$ un polynôme en deux variables à coefficients dans $\mathcal{B}(W)$. L'image de P par (Q,i) est $\sum_{j=0}^{p-1} P_j(Q) T^j$. C'est un polynôme en une variable et à coefficients dans $\mathcal{B}(W)$. Ainsi (Q,i) se factorise en

$$\begin{array}{llcl} (Q,i) : & \mathcal{B}(W)[S,T]/(Q(S) - T) & \to & \mathcal{B}(W)[T] \\ & \displaystyle\sum_{j=0}^{p-1} P_j(T) S^j & \mapsto & \displaystyle\sum_{j=0}^{p-1} P_j(Q) T^j \end{array}.$$

Ce nouveau morphisme est bijectif et vérifie l'inégalité :

$$\deg(P_j(Q(T))) \leq \deg(\sum_{j=0}^{p-1} P_j(Q) T^j).$$

C'est une conséquence de la division euclidienne.

Définition 3.5. Soit U une partie compacte de $B := \mathcal{M}(\mathcal{A})$ et $G := \sum_{i=0}^{p-1} g_i T^i + T^p \in \mathcal{A}[T]$. On dit que U **satisfait la condition** (N_G) si elle est spectralement convexe et si pour tout réel $v > 0$ tel que $\sum_{i=0}^{p-1} \|g_i\|_{\mathcal{A}} v^{i-p} \leq 1/2$, la semi-norme $\|\cdot\|_{U,v,rés}$ est équivalente à la norme spectrale sur $\mathcal{B}(U)[T]/(G(T))$.

Soit U une partie compacte spectralement convexe de $\mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}$. Considérons, maintenant, le polynôme $G := \sum_{i=0}^{p-1} g_i S^i + S^p \in \mathcal{B}(U)[S]$. Nous dirons que U satisfait la condition (N_G) si elle la satisfait en tant que partie compacte spectralement convexe de $\mathcal{M}(\mathcal{B}(U)) \simeq U$.

La proposition 4.4 de [Poi13] assure que si $\overline{D}_W(s,t)$ satisfait la condition $(N_{Q(S)-T})$, le morphisme d'algèbres de Banach $(Q,i) : \mathcal{B}(\overline{D}_W(s,t))[S]/(Q(S)-T) \to \mathcal{B}(\overline{D}_W(Q;s,t))$ est un isomorphisme.

Rappelons aussi une notation. Soit x et y deux réels positifs. Nous noterons $x \prec y$ si $x < y$ ou si $x = 0$.

Proposition 3.6. *Soient $\mathcal{A}$ un anneau de Banach, $x \in \mathbb{A}^1_{\mathcal{A}}$ un point au-dessus de $\pi(x) = b$ et $\mathcal{V}_b$ une base de voisinages compacts spectralement convexes de $b = \pi(x)$ dans $B := \mathcal{M}(\mathcal{A})$ telle que si $\mathscr{H}(b)$ est de caractéristique non nulle et trivialement valué, chaque élément de $\mathcal{V}_b$ possède un bord analytique fini.*

Il existe une base de voisinages spectralement convexes $\mathcal{V}_x$ de x satisfaisant les propriétés suivante :

— *tout élément V de $\mathcal{V}_x$ est de la forme $\overline{D}_W(Q;s,t)$ où W appartient à $\mathcal{V}_b$, Q est un polynôme à coefficients dans $\mathcal{B}(W)$ et $s < t$ sont deux réels strictement positifs ;*

— *si $\overline{D}_W(Q;s,t)$ appartient à $\mathcal{V}_x$ il existe $s_1 \prec s \prec s_2$ et $t_1 < t < t_2$ tels que pour tout $s_1 \prec u \prec s_2$ et $t_1 < v < t_2$ et tout voisinage spectralement convexe de b, $U \in \mathcal{V}_b$ inclus dans W, $\overline{D}_U(Q;u,v)$ appartient à $\mathcal{V}_x$. Cela implique que si $\mathcal{V}_b$ est une base fine $\mathcal{V}_x$ l'est elle aussi.*

— *si $\overline{D}_W(Q;s,t)$ appartient à $\mathcal{V}_x$, les deux parties compactes spectralement convexes de $\mathbb{A}^1_{\mathcal{A}}$, $\overline{D}_W(s,t)$ et $\overline{D}_{\{b\}}(s,t)$ satisfont la condition $(N_{Q(S)-T})$.*

Démonstration de la proposition. Soit $\mathcal{V}_b$ une base de voisinages comme dans l'énoncé

Soit U un voisinage de x dans $\mathbb{A}^1_{\mathcal{A}}$. On note $b := \pi(x)$ la projection de x sur B.

Pour construire un voisinage de la forme souhaité de x dans U, nous allons séparer l'énoncé en deux cas :

• Supposons que la valuation de $\mathscr{H}(b)$ ne soit pas triviale ou que $\mathscr{H}(b)$ soit de caractéristique nulle. Les deux derniers points de la remarque 3.2 assure que x admet une base de voisinage de la forme $\overline{D}_V(Q;s,t)$ avec $s < t$ deux réels, V un voisinage spectralement convexe de b et P un polynôme à coefficients dans $\mathcal{B}(V)$ tel que $Q(b) \in \kappa(b)[T]$ soit séparable. En utilisant le Corollaire 6.8 de [Poi13], on en déduit qu'il existe un voisinage spectralement convexe $V_0 \in \mathcal{V}_b$ de b dans B sur lequel les coefficients de Q sont définis et tels que $\overline{D}_{V_0}(Q;s,t)$ soit un voisinage de x dans U.

• Supposons maintenant que le corps $\mathscr{H}(b)$ soit de caractéristique non nulle et trivialement valué. Par hypothèse, tout élément $W \in \mathcal{V}_b$ est inclus dans $\overbrace{B_{um}}^{\circ}$ et a un bord analytique fini. Dans ce cas on ne fait pas d'hypothèse particulière sur Q. Grâce à la Proposition 6.5 de [Poi13] $\overline{D}_W(Q;s,t)$ est lui aussi inclus dans $\overbrace{(\mathbb{A}^1_{\mathcal{A}})_{um}}^{\circ}$ et a un bord analytique fini.

À partir de ces voisinages, nous allons construire une base de voisinages finie satisfaisant les conditions souhaitées dans l'énoncé. Nous allons, de nouveau, distinguer deux cas selon la séparabilité de $Q(b)(S) \in \mathscr{H}(b)[S]$.

• Supposons que $Q(b)$ soit séparable. D'après le Lemme 6.16 et la Proposition 7.1 de [Poi13], il existe un voisinage ouvert V_1 de b dans V_0, $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$ et $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ vérifiant les inégalités $s \leq s_1 \prec s_2 \prec |Q(x)| < t_1 < t_2 \leq t$ tels que, pour tout voisinage compact et spectralement convexe W de b dans V_1, tout $s_1 \prec u \prec s_2$ tout $t_1 < v < t_2$, $\overline{D}_W(u,v)$ et $\overline{D}_{\{b\}}(u,v)$ satisfont la condition $(N_{Q(S)-T})$ et tels que $\overline{D}_W(Q;u,v)$ soit un voisinage de x dans $\mathbb{A}^1_{\mathcal{A}}$.

• Supposons que Q ne soit pas séparable. Par construction, cela implique que $\overline{D}_V(Q;s,t)$ est inclus dans $(\mathbb{A}^1_{\mathcal{A}})_{um}$ et qu'il possède un bord analytique fini. Ainsi, d'après le Corolaire 6.6 et la Proposition 7.1 de [Poi13], quelque soit $W \in \mathcal{V}_b$, $s < t$ tel que $\overline{D}_W(Q;s,t)$ soit un voisinage de x dans W, $\overline{D}_W(u,v)$ et $\overline{D}_{\{b\}}(u,v)$ satisfont la condition $(N_{Q(S)-T})$.

On a ainsi construit dans tous les cas un ensemble de voisinages de x dans U. On peut alors prendre pour $\mathcal{V}_U$ l'ensemble de ces parties et pour $\mathcal{V}_x$ la réunion des $\mathcal{V}_U$ où U parcourt l'ensemble des voisinages de x dans $\mathbb{A}^1_{\mathcal{A}}$. □

De même qu'après la proposition 3.1, nous allons faire quelques remarques sur des cas particuliers de cette proposition dans lesquels nous pouvons dire un peu plus que l'énoncé (nous ne les avons pas inclus dans l'énoncé de la démonstration pour ne pas l'alourdir). Ces remarques ne découlent pas de l'énoncé mais de sa démonstration.

Remarque 3.7. Soit x un point de $\mathbb{A}^1_{\mathcal{A}}$ rigide au-dessus de $b := \pi(x)$ défini par un polynôme irréductible $P \in \mathscr{H}(b)[T]$.

— La base de voisinage $\mathcal{V}_x$ peut être choisie de sorte que pour tout $\epsilon > 0$ et tout $r > 0$, il existe un voisinage $\overline{D}_U(Q,t)$ appartenant à $\mathcal{V}_x$ avec $Q(b)$ irréductible dans $\kappa(b)[T]$, $\deg(Q) = \deg(P)$, $\|Q(b) - P\|_{\mathscr{H}(b)\langle|T|\leq r\rangle} \leq \epsilon$ et t inférieur à ϵ.

— Si l'on suppose maintenant que P est à coefficients dans $\kappa(b)$, la base de voisinage $\mathcal{V}_x$ peut être choisie de sorte que tout les éléments de $\mathcal{V}_x$ soient de la forme $\overline{D}_U(\tilde{P},t)$ où $\tilde{P}$ est un relèvement de P à $\mathcal{B}(U)[T]$.

Dans l'optique d'utiliser la démonstration précédente, nous allons faire quelques remarques supplémentaire sur les algèbres de séries.

Remarque 3.8. Soient $0 \leq s \prec s' < t' < t$ quatre réels et V une partie de $\mathcal{M}(\mathcal{A})$. Nous avons la suite suivante de morphismes bornés d'algèbres de Banach :

$$\mathcal{B}(V)\langle s \leq |T| \leq t\rangle \to \mathcal{B}(\overline{D}_V(s,t)) \to \mathcal{B}(V)\langle s' \leq |T| \leq t'\rangle.$$

L'existence du second morphisme est dû à la proposition 2.3 de [Poi13]. Ce morphisme va nous permettre de manipuler des éléments de $\mathcal{B}(\overline{D}_V(s,t))$ comme des séries convergentes.

Soient $x \in \mathbb{A}^1_{\mathcal{A}}$ un point rigide et $\overline{D}_V(Q;s,t)$ un voisinage de x tel que le morphisme naturel $\mathcal{B}(\overline{D}_V(s,t))[S]/(Q(S)-T) \to \mathcal{B}(\overline{D}_V(Q;s,t))$ induise un isomorphisme d'algèbres de Banach (pour les normes évoquées dans la proposition précédente). Pour tout f appartenant à $\mathcal{B}(V)\langle s \leq |T| \leq t\rangle[S]/(Q(S)-T)$ nous noterons encore f son image dans $\mathcal{B}(\overline{D}_V(s,t))/(Q(S)-T)$ par le morphisme évoqué plus haut. Ainsi nous noterons $\|f\|_{\mathcal{B}(\overline{D}_V(s,t)),div}$ (resp. $\|f\|_{\mathcal{B}(\overline{D}_V(s,t)),v,rés}$ pour un v convenable, resp. $\|f\|_{\mathcal{B}(\overline{D}_V(Q;s,t))}$) la norme de l'image de cet élément par le morphisme.

De même, pour tout f appartenant à $\mathcal{B}(\overline{D}_V(Q;s,t)) \simeq \mathcal{B}(\overline{D}_V(s,t))[S]/(Q(S)-T)$ nous noterons encore f son image dans $\mathcal{B}(V)\langle s' \leq |T| \leq t'\rangle/(Q(S)-T)$ par le morphisme évoqué plus haut. Ainsi nous noterons $\|f\|_{\mathcal{B}(V)\langle s'\leq|T|\leq t'\rangle,div}$ (resp. $\|f\|_{\mathcal{B}(V)\langle s'\leq|T|\leq t'\rangle,v,rés}$ pour un v convenable) la norme de l'image de cet élément par le morphisme. Par la suite, nous ferons implicitement référence à ce fait.

La proposition suivante va nous permettre pour tout x et tout voisinage $V \in \mathcal{V}_x$ de contrôler la norme des coefficients d'un polynôme P donné au voisinage de $\pi(x)$ en fonction de la norme $\|P\|_V$.

Proposition 3.9. *Soient $\mathcal{A}$ un anneau de Banach, $x \in \mathbb{A}^1_{\mathcal{A}}$ un point au-dessus de b un point de B et $\mathcal{V}_b$ une base de voisinages spectralement convexes de b dans B telle que $\mathscr{H}(b)$ est de caractéristique positive et trivialement valué, chaque élément de $\mathcal{V}_b$ possède un bord analytique fini.*

Soit $\mathcal{V}_x$ une base de voisinages spectralement de x possédant les caractéristiques évoquées dans la proposition précédente et $V = \overline{D}_W(Q;s,t)$ un élément de $\mathcal{V}_x$.

Pour tout $d \in \mathbb{N}$, il existe une constante $K_{V,d} > 0$ telle que quelque soit le polynôme $P := \sum_{i=0}^{d} a_i T^i \in \mathcal{B}(W)[T]$, on ait l'inégalité $\|P\|_V \geq K_{V,d} \max_i \|a_i\|_W$.

Démonstration de la proposition. Soient $V = \overline{D}_W(Q;s,t)$ un élément de $\mathcal{V}_x$ et un polynôme $P := \sum_{i=0}^{d} a_i T^i$ à coefficient dans $\mathcal{B}(W)$. On note n le degré de $Q = \sum_{j=0}^{n} b_j T^j$. Puisque V satisfait les données de la proposition 3.6, le morphisme d'algèbres de Banach

$$\mathcal{B}(\overline{D}_W(s,t))^n \simeq \mathcal{B}(\overline{D}_W(s,t))[S]/(Q(S)-T) \to \mathcal{B}(\overline{D}_W(Q;s,t))$$

est un isomorphisme, où l'algèbre de gauche est munie de la norme $\|.\|_{\mathcal{B}(\overline{D}_W(s,t),div}$ et celle de droite est munie de la norme spectrale. On note :

$$(P_0 := \sum_{k}^{m_0} b_{k,0} T^k, \ldots, P_{n-1} := \sum_{k}^{m_{n-1}} b_{k,n-1} T^k)$$

le n-uplet de polynômes à coefficients dans $\mathcal{B}(W)$ appartenant à $\mathcal{B}(\overline{D}_W(s,t))^n$ correspondant à $P \in \mathcal{B}(\overline{D}_W(Q;s,t))$.

La proposition 3.6 assure qu'il existe $N \in \mathbb{R}^*_+$, indépendant de P, tel que

$$\|P\|_{\overline{D}_W(Q;s,t)} \geq N \max \|P_j\|_{\overline{D}_W(s,t)}.$$

Par construction on a égalité entre P et $\sum_{j=0}^{n-1} P_j(Q(T))T^j$ dans $\mathcal{B}(W)[T]$. Ainsi, pour tout i, le coefficient a_i est une somme de coefficients de P_j multipliés par des coefficients de Q^k, il existe donc une constante C tel que

$$\max \|a_i\|_W \leq C \max \|b_{k,j}\|_W.$$

Ceci étant, il suffit de montrer qu'il existe $K'_{V,d}$ tel que pour tout j, nous avons l'inégalité $\max_k \|b_{j,k}\|_W \leq K'_{V,d}\|P_j\|_{\overline{D}_W(s,t)}$. L'existence d'une telle constante est assurée par la proposition 2.3 de [Poi13].

En effet, la remarque 3.4 assure que pour j nous avons l'inégalité $m_j \leq \deg(P_j(Q)) \leq d$. Soit s' et t' deux réels tels que $s \prec s' < t' < t$. Nous avons la suite d'inégalité :

$$\begin{aligned} \max_k \|b_{k,j}\|_W \min\{t'^d, 1\} &\leq \max_k \|b_{k,j}\|_W \min\{t'^{m_j}, 1\} \\ &\leq \sum_{k=0}^{m_j} \|b_{k,j}\|_W t'^k \\ &= \|P_j\|_{\mathcal{B}(W)\langle s' \leq |T| \leq t' \rangle} \\ &\leq \left(\tfrac{s}{s'-s} + \tfrac{t}{t-t'}\right) \|P_j\|_{\overline{D}_W(s,t)} \end{aligned}$$

où la dernière inégalité provient de la proposition 2.3 de [Poi13]. Ainsi, si l'on pose

$$K'_{V,d} := \frac{1}{\min\{t'^d, 1\}} \left(\frac{s}{s'-s} + \frac{t}{t-t'}\right),$$

nous obtenons l'inégalité souhaitée.

La constante $K_{V,d} := C(N(K'_{V,d}))$ ne dépend pas de P et les inégalités démontrées ci-dessus assurent que nous avons l'inégalité souhaitée $\|P\|_V \geq K_{V,d} \max \|a_i\|_W$. $\square$

3.2 Division de Weierstraß avec contrôle sur les normes

Pour simplifier la rédaction nous allons introduire une nouvelle notion.

Définition 3.10. Soient X un espace topologique et x un point de X. Une **base de voisinages jumelés** de x est un ensemble $\mathcal{V}_x$ de couples (V, V') tels que V' soit inclus dans V et tel que V' soit un voisinage de x dans X. On demande, de plus, que $\mathcal{V}_{x,1}$ forme une base de voisinages de x, où $\mathcal{V}_{x,1}$ est formé de l'ensemble des voisinages V intervenant dans un couple (V, V') appartenant à $\mathcal{V}_x$.

Nous noterons aussi $\mathcal{V}_{x,2}$ l'ensemble des voisinages V' de x faisant parti dans un couple (V, V') appartenant à $\mathcal{V}_x$. On dira parfois que V' est l'un des voisinages associés à V (le voisinage V' n'est pas forcément l'unique voisinage associé à V).

Théorème 3.11. *Soient $\mathcal{A}$ un anneau de Banach, b un point de $B := \mathcal{M}(\mathcal{A})$ et $\mathcal{V}_b$ une base de voisinages jumelés compacts spectralement convexes de b (c'est-à-dire que pour tout couple $(V, V') \in \mathcal{V}_b$, V et V' sont compacts spectralement convexes) tels que tout élément de $\mathcal{V}_{b,1} \cup \mathcal{V}_{b,2}$ soit inclus dans B_{um} et à bord fini si b est ultramétrique typique.*

Soient maintenant $P(S) \in \mathscr{H}(b)[S]$ un polynôme irréductible unitaire et $x \in \mathbb{A}^1_{\mathcal{A}}$ le point correspondant à ce polynôme. On note $\mathcal{V}_x$ une base de voisinages spectralement convexes satisfaisant les axiomes de la proposition 3.6 relativement à la base de voisinages $\mathcal{V}_{b,1} \cup \mathcal{V}_{b,2}$. Soit enfin, $G \in \mathcal{O}_{\mathbb{A}^1_{\mathcal{A}},x}$ un germe de fonction au voisinage de x tel que la valuation P-adique de G restreint à $\mathbb{A}^1_{\mathscr{H}(b)}$ soit égale à $n \in \mathbb{N}^*$.

Il existe une base de voisinages jumelés spectralement convexes $\mathcal{V}_{x,G}$ de x dans $\mathbb{A}^1_{\mathcal{A}}$ satisfaisant les propriétés suivante :

- *pour tout $(V, V') \in \mathcal{V}_{x,G}$, V et V' sont respectivement de la forme $\overline{D}_U(L; r) \in \mathcal{V}_x$ et $\overline{D}_{U'}(L; s) \in \mathcal{V}_x$ avec (U, U') un élément de $\mathcal{V}_b$.*
- *pour tout $F \in \mathcal{O}_{\mathbb{A}^1_{\mathcal{A}},x}$, il existe un unique couple $(Q, R) \in \mathcal{O}^2_{\mathbb{A}^1_{\mathcal{A}},x}$ tel que :*
  - *$F = QG + R$;*
  - *$R \in \mathcal{O}_{B,b}[S]$ est un polynôme de degré strictement inférieur à $n\deg(P)$;*
  - *pour tout couple de voisinages compacts $(V, V') \in \mathcal{V}_{x,G}$ de x, il existe un réel strictement positif $K_{V',V}$, vérifiant la propriété suivante :*
    si F est $\mathcal{B}$-défini sur V, R et Q sont $\mathcal{B}$-définis sur V' et nous avons les inégalités $\|Q\|_{V'} \leq K_{V',V}\|F\|_V$ et $\|R\|_{V'} \leq K_{V',V}\|F\|_V$.

Par la suite, nous appellerons base de voisinages jumelés de Weierstraß adaptée à x, G et $\mathcal{V}_b$ une base de voisinages jumelés satisfaisant les axiomes du théorème précédent.

Avant de commencer la démonstration de ce théorème, nous souhaitons attirer l'attention du lecteur sur un point de l'énoncé. Le caractère obscure de l'énoncé vient essentiellement du fait que nous ne puissions pas prendre $V' = V$. Cette impossibilité provient de la structure de la preuve. En effet, pour la démonstration nous devons faire un raisonnement qui marche dans les cadres archimédien et non archimédien de manière similaire. Pour cela nous utilisons de manière essentielle la Proposition 2.3 de [Poi13]. Cette dernière proposition nous permet, en raisonnant de la même manière que dans la remarque 3.8, de nous ramener à la l'étude d'un anneau de série convergente. La contre partie de l'uniformité en les places de ce raisonnement est qu'il nécessite de réduire le voisinage V considéré initialement. Cependant, cette réduction ne dépend que du voisinage V et non de la fonction étudiée, ce qui est d'une importance capitale pour la démonstration du théorème 3.24.

Démonstration du théorème. Soit d le degré de P. Il existe $\alpha_0, \ldots, \alpha_{d-1} \in \mathscr{H}(b)$ tels que

$$P(S) = S^d + \sum_{i=0}^{d-1} \alpha_i S^i.$$

Puisque la valuation P-adique de G est égale à n, il existe un élément inversible H de $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^1_{\mathscr{H}(b)},x}$ tel que $G = HP^n$.

Nous allons maintenant poser les objets qui nous serons utiles dans le reste de la démonstration. Les conditions que nous donnons (obscures pour le moment) se révèleront être les bonnes dans la suite.

Soient v un réel strictement positif vérifiant l'inégalité

$$\sum_{k=0}^{d-1} |\alpha_i(b)| v^{k-d} \leq \frac{1}{2}$$

et U un voisinage de x dans $\mathbb{A}^1_{\mathcal{A}}$. Soit $V \in \mathcal{V}_{b,1} \cup \mathcal{V}_{b,2}$ un voisinage spectralement convexe de b dans B et $L := \sum_{k=0}^{d-1} l_k T^k + T^d \in \mathcal{B}(V)[T]$ un polynôme vérifiant les propriétés suivantes :

• il existe $r > 0$ tel que l'ensemble $\overline{D}_V(L;r)$ soit un voisinage de x appartenant à $\mathcal{V}_x$ sur lequel G est défini. On note s un réel strictement compris entre 0 et r.

• Les sections H et H^{-1} sont définies sur $\mathbb{A}^1_{\mathscr{H}(b)} \cap \overline{D}_V(L;r)$ dans $\mathbb{A}^1_{\mathscr{H}(b)}$.

• il existe des valeurs $r_1 < r < r_2$ telles que pour tout voisinage spectralement convexe $W \in \mathcal{V}_{b,1}$ inclus dans V et tout $r' \in]r_1, r_2[$, $\overline{D}_W(L;r')$ appartient à $\mathcal{V}_x$ (ce qui est possible grâce à la proposition 3.6).

• on a les inégalités suivantes :

$$\|P - L(b)\|_{\overline{D}_{\{b\}}(r)} < \frac{s^n v^{-(n+1)\deg(P)+n+1}}{4n(\max\{\|P\|_{\overline{D}_{\{b\}}(r)}, \|L(b)\|_{\overline{D}_{\{b\}}(r)}\})^{n-1}}; \tag{3.1}$$

$$\sum_{k=0}^{d-1} \|l_k\|_{\mathcal{B}(V)} v^{k-d} \leq \frac{1}{2}. \tag{3.2}$$

Nous pouvons choisir L de telle sorte qu'il satisfasse ces inégalités grâce à la remarque 3.7. Remarquons que si x est un point rigide épais défini par un polynôme P (séparable si $\kappa(b)$ n'est pas trivialement valué) et $G = \tilde{P}^n$ avec $\tilde{P}$ un relèvement unitaire de P à $\mathcal{B}(V)[T]$, nous pouvons choisir $L := \tilde{P}$. C'est en effet une conséquence de la remarque 3.7.

Grâce à la proposition 3.3 nous savons que pour tout réel $v > 0$ vérifiant l'inégalité $\sum_{k=0}^{d-1} \|l_k\|_{\mathcal{B}(V)} v^{k-d} \leq \frac{1}{2}$, tout ensemble W inclus dans V, et tout réel $0 < s \leq r$, nous avons les inégalités :

$$v^{-\deg(L)+1} \|f\|_{\mathcal{B}(W)\langle |T| \leq s\rangle, v, rés} \leq \|f\|_{\mathcal{B}(W)\langle |T| \leq s\rangle, div} \leq 2\|f\|_{\mathcal{B}(W)\langle |T| \leq s\rangle, v, rés} \tag{3.3}$$

pour tout $f \in \mathcal{B}(W)\langle |T| \leq s\rangle[S]/(L(S) - T)$.

Par la suite, nous noterons $\|.\|_{W,s,v,rés}$ pour la norme $\|.\|_{\mathcal{B}(W)\langle |T| \leq s\rangle, v, rés}$ et $\|.\|_{W,s,div}$ pour la norme $\|.\|_{\mathcal{B}(W)\langle |T| \leq s\rangle, div}$. Si f est une fonction $\mathcal{B}$-définie sur $\overline{D}_V(L;r)$, nous noterons encore f son image par les morphismes naturels suivants (évoqués dans la remarque 3.8) :

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{B}(\overline{D}_V(L;r)) \simeq \mathcal{B}(\overline{D}_V(r))[S]/(Q(S) - T) & \to & \mathcal{B}(V)\langle |T| \leq s\rangle/(Q(S) - T) \\ \mathcal{B}(\overline{D}_V(L;r)) & \to & \mathcal{B}(W)\langle |T| \leq s\rangle/(Q(S) - T) \\ \mathcal{B}(\overline{D}_V(L;r)) & \to & \mathscr{H}(b)\langle |T| \leq s\rangle/(Q(S) - T) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{B}(\overline{D}_V(L;r)) & \to & \mathcal{B}(\overline{D}_W(L;r)) \\ \mathcal{B}(\overline{D}_V(L;r)) & \to & \mathcal{B}(\overline{D}_{\{b\}}(L;r)) \end{array}.$$

Ainsi nous noterons

$$\|f\|_{V,s,v,rés},\ \|f\|_{V,s,div},\ \|f\|_{W,s,v,rés},\ \|f\|_{W,s,div},\ \|f\|_{b,s,v,rés},\ \|f\|_{b,s,div},\ \|f\|_{\overline{D}_W(L;r)}$$
$$\text{et } \|f\|_{\overline{D}_{\{b\}}(L;r)}$$

la norme de son image par l'un de ces morphismes sans le repréciser.

D'après la proposition 3.6, il existe un réel $C > 0$ tel que pour tout $v > 0$ vérifiant l'inégalité $\sum_{k=0}^{d-1} \|l_k\|_{\mathcal{B}(V)} v^{k-d} \leq \frac{1}{2}$ et tout élément f de $\mathcal{B}(\overline{D}_{\{b\}}(r))[S]/(L(S)-T)$ (qui est isomorphe à $\mathcal{B}(\overline{D}_{\{b\}}(L,r))$), on a l'inégalité

$$\|f\|_{v,rés} \leq C\|f\|_{\overline{D}_{\{b\}}(L;r)} \tag{3.4}$$

où $\|.\|_{v,rés}$ est la norme résiduelle sur $\mathcal{B}(\overline{D}_{\{b\}}(r))[S]/(L(S)-T)$ induite par la norme $\|.\|_v$ sur $\mathcal{B}(\overline{D}_{\{b\}}(r))[S]$, l'algèbre $\mathcal{B}(\overline{D}_{\{b\}}(r))$ étant munie de la norme spectrale.

En utilisant l'inégalité (3.4) et la proposition 2.3 de [Poi13], on obtient aussi l'inégalité

$$\|f\|_{b,s,v,rés} \leq \frac{r}{r-s} C\|f\|_{\overline{D}_{\{b\}}(L;r)}. \tag{3.5}$$

Les corollaire 5.4 et théorème 4.8 de [Poi13], assure que $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^1_{\mathscr{H}(b)}}(\overline{D}_{\{b\}}(r))[S]/(L(S)-T)$ et $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^1_{\mathscr{H}(b}}(\overline{D}_{\{b\}}(L;r))$ sont naturellement isomorphes. Qui plus est, en utilisant le corollaire 2.7 de [Poi13], on sait que le morphisme naturel suivant :

$$\operatorname*{colim}_{t>r} \mathscr{H}(b)\langle |T| \leq t\rangle[S]/(L(S)-T) \to \mathcal{O}_{\mathbb{A}^1_{\mathscr{H}(b)}}(\overline{D}_{\{b\}}(r))[S]/(L(S)-T)$$

est un isomorphisme. Ainsi, pour tout $\epsilon > 0$ on peut, quitte à rétrécir V, supposer qu'il existe un élément K de $\mathcal{B}(V)\langle |T| \leq r\rangle[S]/(L(S)-T)$ tel que $\|K(b) - H^{-1}\|_{\overline{D}_{\{b\}}(L;r)} < \epsilon$. En particulier, on peut supposer qu'il existe un élément K de $\mathcal{B}(V)\langle |T| \leq r\rangle[S]/(L(S)-T)$ tel que

$$\|K(b)G(b) - P^n\|_{\overline{D}_{\{b\}}(L;r)} \leq \frac{1}{4v^{\deg(P)-1}} C^{-1}\left(1 - \frac{s}{r}\right) s^n. \tag{3.6}$$

Par choix du polynôme L on a alors l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned} \|K(b)G(b) - P^n\|_{b,s,v,rés} &\overset{(3.5)}{\leq} \tfrac{r}{r-s} C\|K(b)G(b) - P^n\|_{\overline{D}_{\{b\}}(L;r)} \\ &\overset{(3.6)}{\leq} \tfrac{s^n}{4v^{\deg(P)-1}} \end{aligned} \tag{3.7}$$

Nous avons, maintenant, la suite d'inégalités suivante :

$$\begin{aligned} \|P^n - L(b)^n\|_{b,s,v,rés} &\leq \|P - L(b)\|_{b,s,v,rés} \Big\|\sum_{i=0}^{n-1} P^i L(b)^{n-1-i}\Big\|_{b,s,v,rés} \\ &\leq \|P - L(b)\|_{b,s,v,rés}\, n \max(\|P\|_{b,s,v,rés}, \|L(b)\|_{b,s,v,rés})^{n-1} \\ &\overset{(3.3)}{\leq} v^{\deg(L)-1}\|P - L(b)\|_{b,s,div}\, n \max(\|P\|_{b,s,v,rés}, \|L(b)\|_{b,s,v,rés})^{n-1} \\ &\overset{(3.3)}{\leq} n v^{n\deg(L)-n}\|P - L(b)\|_{b,s,div} \max(\|P\|_{b,s,div}, \|L(b)\|_{b,s,div})^{n-1}. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Par choix du polynôme L on a aussi l'inégalité stricte suivante :

$$\|P^n - L(b)^n\|_{b,s,v,rés} \overset{(3.1)+(3.8)}{<} s^n v^{-\deg(P)+1}/4. \tag{3.9}$$

On peut donc en conclure que pour ce choix de L et K on a l'inégalité

$$\|K(b)G(b) - L(b)^n\|_{b,s,v,rés} \overset{(3.7)+(3.9)}{<} \frac{v^{-\deg(P)+1}s^n}{2}. \tag{3.10}$$

En utilisant une fois de plus le corollaire 2.7 de [Poi13], on montre que la flèche canonique

$$\operatorname*{colim}_{V \ni b, t>r} \mathcal{B}(V)\langle |T| \leq t\rangle[S]/(L(S)-T) \to \mathcal{O}_{\mathbb{A}^1_{\mathcal{A}}}(\overline{D}_{\{b\}}(r))[S]/(L(S)-T)$$

où V parcourt les voisinages spectralement convexes de b dans B, est un isomorphisme. Et donc, quitte à réduire V, on peut supposer que G possède un représentant dans $\mathcal{B}(V)\langle |T| \leq r\rangle[S]/(L(S)-T)$. Enfin, quitte à restreindre une dernière fois le voisinage V de b, on peut supposer que

$$\|KG - L^n\|_{V,s,v,rés} < \frac{v^{-\deg(P)+1}s^n}{2}. \tag{3.11}$$

Soit (W, W') un élément de $\mathcal{V}_b$ tel que W soit inclus dans V. Il suffit maintenant de montrer que $\overline{D}_W(L; r)$ satisfait les propriétés requises par les éléments de $\mathcal{V}_{x,G}$ si on lui associe un voisinage de la forme $\overline{D}_{W'}(L; s)$.

Commençons d'abord par nous intéresser à l'algèbre $\mathcal{B}(W')\langle |T| \leq s\rangle[S]/(L(S)-T)$.

Tout élément φ appartenant à $\mathcal{B}(W')\langle |T| \leq s\rangle[S]/(L(S)-T)$ peut s'écrire de façon unique sous la forme

$$\varphi = \sum_{i=0}^{d-1}(\alpha_i(\varphi)T^n + \beta_i(\varphi))S^i,$$

où les $\alpha_i(\varphi)$ sont des éléments de $\mathcal{B}(W')\langle |T| \leq s\rangle$ et les $\beta_i(\varphi)$ des éléments de $\mathcal{B}(W')[T]$ de degré strictement inférieur à n. On note

$$\alpha(\varphi) = \sum_{i=0}^{d-1}\alpha_i(\varphi)S^i \text{ et } \beta(\varphi) = \sum_{i=0}^{d-1}\beta_i(\varphi)S^i.$$

Puisque $L(S) = T$ dans notre anneau, on peut remarquer que $\beta(\varphi)$ est un polynôme en S de degré inférieur à $nd - 1$. Nous avons, de plus, l'égalité :

$$\varphi = \alpha(\varphi)T^n + \beta(\varphi).$$

Enfin, nous avons les deux inégalités suivantes :

$$\|\alpha(\varphi)\|_{W',s,div} \leq s^{-n}\|\varphi\|_{W',s,div} \text{ et } \|\beta(\varphi)\|_{W',s,div} \leq \|\varphi\|_{W',s,div}. \tag{3.12}$$

Considérons, à présent, l'endomorphisme

$$\begin{array}{rccc} A_{W'}: & \mathcal{B}(W')\langle |T| \leq s\rangle[S]/(L(S)-T) & \to & \mathcal{B}(W')\langle |T| \leq s\rangle[S]/(L(S)-T) \\ & \varphi & \mapsto & \alpha(\varphi)KG+\beta(\varphi) \end{array}.$$

Pour tout $\varphi \in \mathcal{B}(W')\langle |T| \leq s\rangle[S]/(L(S)-T)$, nous avons la suite d'inégalités suivante :

$$\begin{array}{rcl} \|A_{W'}(\varphi)-\varphi\|_{W',s,w,rés} & = & \|\alpha(\varphi)(KG-T^n)\|_{W',s,w,rés} \\ & \leq & \|\alpha(\varphi)\|_{W',s,w,rés}\|KG-L^n\|_{W',s,w,rés} \\ & \underset{(3.3)+(3.12)}{\leq} & 2v^{\deg(P)-1}s^{-n}\|KG-L^n\|_{W',s,w,rés}\|\varphi\|_{W',s,w,rés}. \end{array} \tag{3.13}$$

Ainsi, grâce à l'inégalité (3.11), on sait que la norme de $A_{W'} - Id_{\mathcal{B}(W')\langle |T|\leq s\rangle[S]/(L(S)-T)}$ en tant qu'opérateur est strictement inférieure à 1. Cela implique que $A_{W'}$ est un isomorphisme d'espaces de Banach.

Maintenant nous allons pouvoir définir un morphisme allant de $\mathcal{B}(\overline{D}_W(L;r)) = \mathcal{B}(V)$ dans $\mathcal{B}(\overline{D}_{W'}(L;s))^2 = \mathcal{B}(V')^2$ qui sera borné pour les normes uniformes respectives $\|.\|_{\overline{D}_V(L;r)}$ et $\|.\|_{\overline{D}_{W'}(L;s)}$.

On note r le morphisme borné naturel

$$r : \mathcal{B}(\overline{D}_W(L;r)) \to \mathcal{B}(W')\langle |T| \leq s\rangle[S]/(L(S)-T)$$

pour la norme $\|.\|_{\overline{D}_W(L;r)}$ à gauche et $\|.\|_{W',s,div}$ à droite. De même, on note r' le morphisme borné naturel $r' : \mathcal{B}(W')\langle |T| \leq s\rangle[S]/(L(S)-T) \to \mathcal{B}(\overline{D}_{W'}(L;s))$. Le morphisme évoqué plus haut sera $(r',r')\circ(\alpha,\beta)\circ(A_{W'})^{-1}\circ r$, il est borné comme composition de morphismes bornés. Autrement dit, il existe une constante que nous noterons $K_{V',V} > 0$ telle que pour tout $F \in \mathcal{B}(\overline{D}_W(L;r))$ nous ayons $\max\{\|\alpha'(F)\|_{V'}, \|\beta'(F)\|_{V'}\} \leq K_{V',V}\|F\|_V$. On notera ce morphisme (α',β'). Pour tout fonction F qui est $\mathcal{B}$-défini sur $\overline{D}_W(L;r)$, on a l'égalité $F = \alpha'(F)G + \beta'(F)$ dans $\mathcal{B}(\overline{D}_{W'}(L;s))$. De plus, $\beta'(F)$ appartient à $\mathcal{B}(W')[S]$ et est de degré strictement inférieur à $n\deg(P)$. □

3.3 Comparaison entre les normes et changement de variables

Nous allons maintenant donner une version du Théorème 8.8 de [Poi13] avec des conditions de normes. Soit P un polynôme unitaire de degré d supérieur à 1 à coefficients dans $\mathcal{A}$. Ce polynôme induit un morphisme de $\mathcal{A}$-algèbres $\mathcal{A}[T] \to \mathcal{A}[T]$ qui envoie T sur P. L'exemple 2.4 assure que nous pouvons associer à ce morphisme de $\mathcal{A}$-algèbres un morphisme d'espaces analytiques que nous noterons $\varphi_P : \mathbb{A}^1_{\mathcal{A}} \to \mathbb{A}^1_{\mathcal{A}}$.

De même, on note $\varphi_{(P,T)} : \mathbb{A}^1_{\mathcal{A}} \to \mathbb{A}^2_{\mathcal{A}}$ correspondant au morphisme de $\mathcal{A}$-algèbres

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}[T,S] & \to & \mathcal{A}[T] \\ T & \mapsto & P \\ S & \mapsto & T \end{array}.$$

Soit Z le sous-espace analytique de $\mathbb{A}^2_{\mathcal{A}}$ défini par le polynôme $G(T,S) := P(S) - T$.

Proposition 3.12. *Si $\mathcal{A}$ satisfait les conditions du théorème 3.11, le morphisme $\varphi_{(P,T)}$ induit un isomorphisme entre $\mathbb{A}^1_{\mathcal{A}}$ et Z (en particulier c'est une immersion fermée).*

Démonstration de la proposition. Nous avons l'égalité $Id_{\mathbb{A}^1_{\mathcal{A}}} = p_2 \circ \varphi_{(P,T)}$ (cela provient du fait que le morphisme d'algèbres composé correspondant $\mathcal{A}[T] \overset{S}{\to} \mathcal{A}[T,S] \overset{(P,T)}{\to} \mathcal{A}[T]$ est l'identité).

Maintenant, le morphisme $\varphi_{(P,T)} : \mathbb{A}^1_{\mathcal{A}} \to \mathbb{A}^2_{\mathcal{A}}$ se factorise par Z (c'est une conséquence de 2.16). Il nous faut montrer que $\varphi_{(P,T)} \circ p_2 : Z \to Z$ est égale à l'identité de Z. Pour cela, remarquons que par construction ce morphisme s'étend en $\varphi_{(P(S),S)} : \mathbb{A}^2_{\mathcal{A}} \to \mathbb{A}^2_{\mathcal{A}}$, le morphisme d'espaces analytiques associé au morphisme d'algèbres

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}[T,S] & \to & \mathcal{A}[T,S] \\ T & \mapsto & P(S) \\ S & \mapsto & S \end{array}.$$

Montrons que la composition de l'immersion $j : Z \to \mathbb{A}^2_{\mathcal{A}}$ avec $\varphi_{(P(S),S)}$ est égale à j. Du point de vue ensembliste cela provient du fait que Z comme sous-ensemble $\mathbb{A}^2_{\mathcal{A}}$ est l'ensemble des semi-normes de $\mathcal{A}[T,S]$ qui envoient $P(S)-T$ sur 0. Comme nous allons le voir par la suite, du point de vue du faisceau c'est une conséquence du théorème de division de Weierstraß 3.11. Soient $x \in Z$ et $f \in \mathcal{O}_{\mathbb{A}^2_{\mathcal{A}}, \varphi_{P(S),S}(x)}$ une section $\mathcal{B}$-définie sur un voisinage compact spectralement convexe V de $\varphi_{(P(S),S)}(x) = x$. Il existe une suite de fonctions rationnelles $\left(\frac{Q_i}{R_i}\right)_{i\in\mathbb{N}}$ sans pôle sur V telle que $\lim\limits_{i\to+\infty} \dfrac{Q_i}{R_i} = f$ pour la norme uniforme sur V. Puisque $\varphi_{P(S),S}$ est un morphisme d'espaces analytiques, il existe un voisinage spectralement convexe U de x tel que $\varphi_{P(S),S}(U)$ et U soient inclus dans V et tel que pour toute section g définie sur V, $\|\varphi^{\#}_{P(S),S}(g)\|_U \leq \|g\|_V$. Cela implique que nous avons l'égalité $\lim\limits_{i\to+\infty} \dfrac{\varphi^{\#}_{(P(S),S)}(Q_i)}{\varphi^{\#}_{(P(S),S)}(R_i)} = \varphi^{\#}_{(P(S),S)}(f)$. Par définition de Z et du morphisme $\varphi_{(P(S),S)}$ nous savons que pour tout $i \in \mathbb{N}$, l'image dans $\mathcal{O}_{Z,x}$ de la fonction analytique $\frac{\varphi^{\#}_{(P(S),S)}(Q_i)}{\varphi^{\#}_{(P(S),S)}(R_i)} - \frac{Q_i}{R_i}$ est nulle. Le théorème 3.11 assure que, quitte à réduire U, nous pouvons supposer qu'il existe une suite de Cauchy $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de sections $\mathcal{B}$-définies sur U telles que pour tout $i \in \mathbb{N}$, nous avons l'égalité $f_i(P(S)-T) = \frac{\varphi^{\#}_{(P(S),S)}(Q_i)}{\varphi^{\#}_{(P(S),S)}(R_i)} - \frac{Q_i}{R_i}$ sur U. Ainsi la section $\varphi^{\#}_{(P(S),S)}(f) - f = \lim\limits_{i\to+\infty}(f_i)(P(S)-T)$ est nulle dans $\mathcal{O}_{Z,x}$.

Cela démontre que $\varphi_{(P,T)} \circ p_2 : Z \to Z$ est égale à l'identité de Z et donc que $\varphi_{(P,T)}$ induit un isomorphisme entre $\mathbb{A}^1_{\mathcal{A}}$ et Z. □

Remarque 3.13. La démonstration serait quasi immédiante si $\mathcal{A}$ était un anneau de base une fois que l'on a le théorème 4.3. Cependant, nous allons utiliser l'existence de cette immersion fermé dans le cas où $\mathcal{A} = \mathcal{B}(V)$ avec V un voisinage spectralement d'un point d'un espace affine. Ce ne sera donc pas un anneau de base.

Une fois de plus, nous noterons $p_1 : Z \to \mathbb{A}^1_{\mathcal{A}}$ la restriction à Z projection sur la première coordonnée et $p_2 : Z \to \mathbb{A}^1_{\mathcal{A}}$ la restriction à Z la projection sur la seconde. Pour finir avec l'introduction des objets qui vont nous être utiles dans la démonstration du théorème qui suit, remarquons que $\varphi_P = p_1 \circ \varphi_{(P,T)}$. Puisque $p_2 : Z \to \mathbb{A}^1_{\mathcal{A}}$ est l'inverse de $\varphi_{(P,T)} : \mathbb{A}^1_{\mathcal{A}} \to Z$, nous en déduisons l'égalité $\varphi_P \circ p_2 = p_1$.

Pour récapituler nous avons donc le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[d, shift left, "p_2"] \arrow[dr, "p_1"] & \\ \mathbb{A}^1_{\mathcal{A}} \arrow[u, bend left, "\varphi_{(P,T)}"] \arrow[r, "\varphi_P"'] & \mathbb{A}^1_{\mathcal{A}} \end{tikzcd}.$$

Considérons les deux morphismes naturels

$$\begin{array}{cccc} \psi : & \mathcal{O}^d_{\mathbb{A}^1_{\mathcal{A}}} & \to & (p_1)_*(\mathcal{O}_Z) \\ & (a_0, \ldots, a_{d-1}) & \mapsto & \displaystyle\sum_{i=0}^{d-1} a_i S^i \end{array}$$

et

$$\begin{array}{cccc} \varphi^{\#}_{(P,T)} : & (p_1)_*(\mathcal{O}_Z) & \to & (p_1)_*\left((\varphi_{(P,T)})_*\left(\mathcal{O}_{\mathbb{A}^1_{\mathcal{A}}}\right)\right) \simeq (\varphi_P)_*\left(\mathcal{O}_{\mathbb{A}^1_{\mathcal{A}}}\right) \\ & f & \mapsto & \varphi^{\#}_{(P,T)}(f) \end{array}.$$

On pose $\psi_P := \varphi^{\#}_{(P,T)} \circ \psi$. Le morphisme $\psi_P : \mathcal{O}^d_{\mathbb{A}^1_{\mathcal{A}}} \to (\varphi_P)_*\left(\mathcal{O}_{\mathbb{A}^1_{\mathcal{A}}}\right)$ est le morphisme qui pour tout ouvert U de $\mathbb{A}^1_{\mathcal{A}}$ envoie le d-uplet $(a_0, \ldots, a_{d-1}) \in \mathcal{O}^d_{\mathbb{A}^1_{\mathcal{A}}}(U)$ sur la fonction $\displaystyle\sum_{i=0}^{d-1} \varphi^{\#}_P(a_i) T^i \in \mathcal{O}_{\mathbb{A}^1_{\mathcal{A}}}(\varphi_P^{-1}(U))$ (où T désigne la fonction coordonnée de $\mathbb{A}^1_{\mathcal{A}}$).

Théorème 3.14. *Soit $\mathcal{A}$ un anneau de Banach et b un point de $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ tel que si $\mathscr{H}(b)$ est de caractéristique non nulle b est ultramétrique typique. Le morphisme de faisceaux ψ_P est un isomorphisme.*

Le morphisme ψ_P vérifie, de plus, les deux propriétées suivantes :

- *Pour tout voisinage compact spectralement convexe U de x dans $\mathbb{A}^1_{\mathcal{A}}$, il existe une constante $K_U > 0$ et un voisinage compact spectralement convexe V de $\varphi_P(x)$ dans $\mathbb{A}^1_{\mathcal{A}}$ tels que pour tout $g \in \mathcal{O}_{\mathbb{A}^1_{\mathcal{A}},x}$ $\mathcal{B}$-défini sur U, $\psi_P^{-1}(g) \in \mathcal{O}^d_{\mathbb{A}^1_{\mathcal{A}},\varphi_P(x)}$ est $\mathcal{B}$-défini sur V et $\|\psi_P^{-1}(g)\|_V \leq K_U \|g\|_U$.*
- *Pour tout voisinage compact spectralement convexe V de $\varphi_P(x)$ dans $\mathbb{A}^1_{\mathcal{A}}$, il existe une constante $K_V > 0$ et un voisinage compact spectralement convexe U de x dans $\mathbb{A}^1_{\mathcal{A}}$ tels que pour tout $f \in \mathcal{O}^d_{\mathbb{A}^1_{\mathcal{A}},\varphi_P(x)}$, $\mathcal{B}$-défini sur V, $\psi_P(f) \in \mathcal{O}_{\mathbb{A}^1_{\mathcal{A}},x}$ est $\mathcal{B}$-défini sur V et $\|\psi_P(f)\|_U \leq K_V \|f\|_V$.*

Avant de commencer la démonstration de cet énoncé rappelons le fait suivant :

Pour tout voisinage de U de x et tout voisinage V de $\varphi_P(x)$, la remarque 1.16 assure que les morphismes

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}[T,S] & \to & \mathcal{B}(U)[S] \\ T & \mapsto & T \in \mathcal{B}(U) \\ S & \mapsto & S \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{A}[T,S] & \to & \mathcal{B}(V)[T] \\ T & \mapsto & T \\ S & \mapsto & S \in \mathcal{B}(V) \end{array}$$

induisent une identification de $\mathbb{A}^1_{\mathcal{B}(U)}$ (resp. $\mathbb{A}^1_{\mathcal{B}(V)}$) au sous-ensemble $p_2^{-1}(U)$ (resp. $p_1^{-1}(V)$) de $\mathbb{A}^2_{\mathcal{A}}$ qui est un voisinage de $\varphi_{(P,T)}(x)$. La première identification va nous permettre d'utiliser le théorème 3.11 au voisinage du point $\varphi_{(P,T)}(x)$ dans $\mathbb{A}^2_{\mathcal{A}}$ au-dessus de $\varphi_P(x)$, la seconde au-dessus de x.

Démonstration du théorème. Le fait que le morphisme ψ_P est un isomorphisme de faisceaux est assuré par le Théorème 8.8 de [Poi13].

Soient x un point de $\mathbb{A}^1_{\mathcal{A}}$ et U un voisinage compact spectralement convexe de x dans $\mathbb{A}^1_{\mathcal{A}}$.

Soit $\mathcal{V}_{\varphi_P(x)}$ la base de voisinages jumelés constituée des couples (V,V) avec V un voisinage spectralement convexe de $\varphi_P(x)$.

On note, de plus, $\mathcal{V}_{\varphi_{(P,T)}(x),G}$ une base de voisinages jumelés de Weierstraß adaptés à $\varphi_{(P,T)}(x)$, $G(T,S) := P(S) - T \in \mathcal{B}(U)[S]$ et $\mathcal{V}_{\varphi_P(x)}$. Pour tout couple de voisinages $(W,W') \in \mathcal{V}_{\varphi_{(P,T)}(x),G}$ nous noterons $K_{W',W} > 0$ une constante satisfaisant les propriétés souhaitées.

Commençons par montrer qu'il existe un voisinage compact V de $\varphi_P(x)$ dans $\mathbb{A}^1_{\mathcal{A}}$ et une constante $K_U > 0$ tels que pour tout f, $\mathcal{B}$-défini sur U, $\psi_P^{-1}(f)$ est $\mathcal{B}$-défini sur V et $\|\psi_P^{-1}(f)\|_V \leq K_U \|f\|_U$.

Puisque la projection p_2 est un morphisme d'espaces analytiques, il existe un voisinage jumelé $(W,W') \in \mathcal{V}_{\varphi_{(P,T)}(x),G}$ tel que $p_2(W)$ soit inclus dans U et tel que pour toute section f, $\mathcal{B}$-définie sur U, nous avons l'inégalité $\|p_2^\#(f)\|_W \leq \|f\|_U$. On note V la projection de W' sur la première variable (qui est un voisinage compact de $\varphi_P(x)$).

Le théorème 3.11 nous assure qu'il existe une constante $K_{W',W} > 0$ (indépendante de f), $\tilde{f} = \sum\limits_{i=0}^{d-1} a_i S^i \in \mathcal{B}(V)[S]$ et $f' \in \mathcal{B}(W')$ tels que de $p_2^\#(f) = f'G + \tilde{f}$ sur V et $\max\{\|f'\|_{W'}, \|\tilde{f}\|_{W'}\} \leq K_{W',W} \|p_2^\#(f)\|_W$.

De plus, la proposition 3.9 assure qu'il existe une $K_{W',d} > 0$ (indépendante de f) telle que $K_{W',d} \max\limits_i \|a_i\|_V \leq \|\tilde{f}\|_{W'}$ pour tout f, $\mathcal{B}$-définie sur U.

Or par construction le d-uplet $(a_0, \ldots, a_{d-1}) \in \mathcal{O}^d_{\mathbb{A}^1_{\mathcal{A}}, \varphi_P(x)}$ est égal au germe de $\psi_P^{-1}(f)$ en $\varphi_P(x)$. De plus, les a_i sont $\mathcal{B}$-définis sur V et nous avons l'inégalité :

$$\|\psi_P^{-1}(f)\|_V = \max_i \|a_i\|_V \leq K^{-1}_{W',d} K_{W',W} \|f\|_U.$$

Passons au sens inverse de l'énoncé. Soient $x \in \mathbb{A}^1_{\mathcal{A}}$ et V un voisinage de $\varphi_P(x)$ dans $\mathbb{A}^1_{\mathcal{A}}$. On note U un voisinage compact de x dans $\varphi_P^{-1}(V)$.

Soit $g \in \mathcal{O}^d_{\mathbb{A}^1_{\mathcal{A}}, \varphi_P(x)}$ une section $\mathcal{B}$-définie sur V. On note W un voisinage de $\varphi_{(P,T)}(x)$

dans $\overbrace{p_1^{-1}(V)}^{\circ}$. Soit U un voisinage compact de x dans $\varphi_{(P,T)}^{-1}(W)$ tel que le morphisme

$$\varphi_{(P,T)}^{\#} : \mathcal{O}_{\mathbb{A}^2_{\mathcal{A}}}(W) \to \mathcal{O}_{\mathbb{A}^1_{\mathcal{A}}}(U)$$

soit borné pour les normes uniformes.

Soit $g := (a_0, \ldots, a_{d-1}) \in \mathcal{O}^d_{\mathbb{A}^1_{\mathcal{A}}, \varphi_P(x)}$ un germe $\mathcal{B}$-défini sur V. Montrons que $\psi_P(g)$ est $\mathcal{B}$-défini sur U. Soit W' un voisinage compact de W dans $\overbrace{p_1^{-1}(V)}^{\circ}$. Par hypothèse, la fonction analytique $\tilde{f} := \sum_{i=0}^{d-1} a_i S^i$ est $\mathcal{B}$-définie sur W' (nous sommes obligé d'augmenter W pour pouvoir utiliser le fait que $\varphi_{(P,T)}^{\#} : \mathcal{O}_{\mathbb{A}^2_{\mathcal{A}}}(W) \to \mathcal{O}_{\mathbb{A}^1_{\mathcal{A}}}(U)$ soit borné car ce fait ne concerne que les fonctions qui sont définies au voisinage de W). Soit $\left(\frac{P_k}{Q_k}\right)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions rationnelles sans pôle sur W' tel que $\sum_{i=0}^{d-1} a_i S^i$ soit la limite uniforme de cette suite sur W'. Puisque $\varphi_{(P,T)}^{\#}$ respecte les fonctions rationnelles pour tout $k \in \mathbb{N}$, la fonction $\frac{\varphi_{(P,T)}^{\#}(P_k)}{\varphi_{(P,T)}^{\#}(Q_k)}$ est rationnelle. Par choix de U, la suite $\left(\frac{\varphi_{(P,T)}^{\#}(P_k)}{\varphi_{(P,T)}^{\#}(Q_k)}\right)_{k \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers $\varphi_{(P,T)}^{\#}(\tilde{f}) = \psi_P(g)$ sur U (autrement dit $\psi_P(g)$ est $\mathcal{B}$-définie sur U).

Remarquons que dans la construction précédente, par choix de U et de W, nous avons l'inégalité $\|\psi_P(g)\|_U \leq \|\tilde{f}\|_W$. Ainsi pour montrer la dernière inégalité de l'énoncé il suffit de montrer qu'il existe un constante $K_V > 0$ telle que $\|\tilde{f}\|_W \leq K_V \|g\|_V$. Or par compacité W est inclus dans un voisinage de la forme $\overline{D}_V(t) \subset p_2^{-1}(V)$.

Pour tout d-uplet g, la fonction $\tilde{f}$ est définie sur $\overline{D}_V(t)$ et nous avons l'inégalité :

$$\|\tilde{f}\|_W \leq \|\tilde{f}\|_{\overline{D}_V(t)}.$$

Or puisque $\tilde{f}$ est un polynôme de degré au plus d en la seconde variable nous avons aussi la suite d'inégalités :

$$\begin{aligned} \|\tilde{f}\|_{\overline{D}_V(t)} &\leq \sum_{i=0}^{d-1} \|a_i\|_V t^i \\ &\leq d \max\{1, t^{d-1}\} \max_i \|a_i\|_V. \end{aligned}$$

Ainsi si l'on pose $K_V := d \max\{1, t^{d-1}\}$ nous obtenons une constante qui ne dépend pas de g tel que $\|\tilde{f}\|_W \leq K_V \|g\|_V$.

Ce qui achève la démonstration. □

Nous aurons enfin besoin d'un lemme de changement de variables. Il a été une première fois énoncé par Jérôme Poineau dans l'article [Poi13], c'est le Lemme 9.15. Nous en proposons ici une preuve assez différente.

Avant d'entamer la démonstration de ce résultat, nous allons introduire une notation qui nous sera utile par la suite. Soient $n \geq k$ deux entiers positifs et x un point de $\mathbb{A}^k_{\mathcal{A}}$. On note $0_{x,n}$ le point de $\mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}$ qui est rigide épais au-dessus de x et défini par l'idéal engendré par les polynômes $T_{k+1}, \dots, T_n$.

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $u_1, \dots, u_{n-1} \in \mathbb{N}^*$. Le morphisme $\psi_{(u_1,\dots,u_{n-1})}$ désignera l'automorphisme (voir l'exemple 2.4 pour la construction) de $\mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}$ correspondant à un changement de variables de la forme

$$\begin{cases} T_1 & \mapsto & T_1 + T_n^{u_1}, \\ & \vdots & \\ T_{n-1} & \mapsto & T_{n-1} + T_n^{u_{n-1}}, \\ T_n & \mapsto & T_n, \end{cases}.$$

On remarque que pour tout $n-1$-uplet $u_1, \dots, u_{n-1} \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{A}^{n-1}_{\mathcal{A}}$, on a l'égalité $\psi_{(u_1,\dots,u_{n-1})}(0_{x,n}) = 0_{x,n}$.

Lemme 3.15. *Soient b un point de $B := \mathcal{M}(\mathcal{A})$. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, x un point rigide de $\mathbb{A}^{n-1}_{\mathcal{A}}$ au-dessus de b et $0_{x,n} \in \mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}$ le point rigide au-dessus de x correspondant à l'idéal (T_n) de $\kappa(x)[T_n]$.*

Soit f un élément de $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_{\mathcal{A}},0_{x,n}}$ tel que la restriction de f à $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_{\mathscr{H}(b)},0_{x,n}}$ soit non nulle.

Il existe un $n-1$-uplet $u_1, \dots, u_{n-1} \in \mathbb{N}^*$, tel que $\psi^{\#}_{(u_1,\dots,u_{n-1})}(f)$ soit non nulle dans $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^1_{\mathscr{H}(x)},0_{x,n}}$.

Démonstration du lemme. Étant donné que f est une fonction non nulle une fois restreinte à $\mathbb{A}^n_{\mathscr{H}(b)}$, nous pouvons nous ramener au cas où $\mathcal{A}$ est un corps K. Soit $\widehat{\overline{K}}$ la complétion d'une clôture algébrique de K. Nous savons que $\mathbb{A}^n_K$ s'identifie à $\mathbb{A}^n_{\widehat{\overline{K}}}/G_K$ où G_K est le groupe de Galois de l'extension $K|\overline{K}$. Soit $x' \in \mathbb{A}^{n-1}_{\widehat{\overline{K}}}$ un antécédent de $x \in \mathbb{A}^{n-1}_K$. Le point $0_{x',n} \in \mathbb{A}^n_{\widehat{\overline{K}}}$ est lui aussi un antécédent de $0_{x,n} \in \mathbb{A}^n_K$. De plus, soit $g \in \mathcal{O}_{\mathbb{A}^1_{\mathscr{H}(x)},0_{x,n}}$ un germe. Si l'image de g par le morphisme $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^1_{\mathscr{H}(x)},0_{x,n}} \to \mathcal{O}_{\mathbb{A}^1_{\mathscr{H}(x')},0_{x',n}}$ est nulle le germe g est nul lui aussi dans $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^1_{\mathscr{H}(x)},0_{x,n}}$.

Ainsi, les changements de variables $\psi^{\#}_{(u_1,\dots,u_{n-1})}$ respectant les élément de $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^1_{\mathscr{H}(x)},0_{x,n}}$, il suffit de montrer l'énoncé dans le cas où K est un corps complet algébriquement clos. Puisque nous sommes maintenant au-dessus d'un corps algébriquement clos, le point $0_{x,n}$ correspond à un n-uplet $(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, 0)$ avec les α_i appartenant à K.

Montrons que l'idéal de $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_K,0_{x,n}}$

$$I_n \quad := \quad \begin{cases} \{0\} & \text{si } n = 1 \\ \bigcap\limits_{(u_1,\dots,u_{n-1}) \in (\mathbb{N}^*)^{n-1}} (T_1 - \alpha_1 - T_n^{u_1}, \dots, T_{n-1} - \alpha_{n-1} - T_n^{u_{n-1}}) & \text{sinon} \end{cases}$$

est égal à l'idéal nul. Remarquons, pour cela, que nous avons les inclusions naturelles

$$I_n \subset \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_K,0_{x,n}} \subset K[\![T_1 - \alpha_1, \dots, T_{n-1} - \alpha_{n-1}, T_n]\!].$$

Nous allons montrer que I_n est nul par récurrence sur n.

Si $n = 1$ il n'y a rien à montrer.

Supposons que nous ayons démontré l'énoncé pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $f \in I_{n+1}$. Fixons $u_n \in \mathbb{N}^*$. La projection de f dans

$$\begin{gathered} K[\![T_1 - \alpha_1, \ldots, T_n - \alpha_n, T_{n+1}]\!]/(T_n - \alpha_n - T_{n+1}^{u_n}) \\ \simeq \\ K[\![T_1 - \alpha_1, \ldots, T_{n-1} - \alpha_{n-1}, T_{n+1}]\!] \\ \simeq \\ K[\![T_1 - \alpha_1, \ldots, T_{n-1} - \alpha_{n-1}, T_n]\!] \end{gathered}$$

appartient à I_n, ainsi par hypothèse de récurrence f est nulle dans la K-alèrbe quotient $K[\![T_1 - \alpha_1, \ldots, T_n - \alpha_n, T_{n+1}]\!]/(T_n - \alpha_n - T_{n+1}^{u_n})$ ce qui implique que f est multiple de $T_n - \alpha_n - T_{n+1}^{u_n}$. Ceci est vrai pour tout $u_n \in \mathbb{N}^*$. Les $T_n - \alpha_n - T_{n+1}^{u_n}$ étant tous irréductibles dans $K[\![T_1 - \alpha_1, \ldots, T_n - \alpha_n, T_{n+1}]\!]$ (cela provient encore de l'isomorphisme $K[\![T_1-\alpha_1, \ldots, T_n-\alpha_n, T_{n+1}]\!]/(T_n-\alpha_n-T_{n+1}^{u_n}) \simeq K[\![T_1-\alpha_1, \ldots, T_{n-1}-\alpha_{n-1}, T_n]\!]$) et non associé et l'anneau $K[\![T_1 - \alpha_1, \ldots, T_n - \alpha_n, T_{n+1}]\!]$ étant factoriel l'élément f est nul.

Montrons maintenant que le fait que I_n soit nul implique le résultat souhaité. Puisque f est non nulle, il existe un $n-1$-uplet $(u_1, \ldots, u_{n-1}) \in (\mathbb{N}^*)^{n-1}$ tel que f n'appartienne pas à $(T_1-\alpha_1-T_n^{u_1}, \ldots, T_{n-1}-\alpha_{n-1}-T_n^{u_{n-1}})$. Posons $\psi := \psi_{(u_1,\ldots,u_{n-1})}$. Montrons que $\psi^{\#}(f)$ restreint à $\mathbb{A}^1_{\mathscr{H}(x)}$ est non nul. Pour montrer cela il suffit de montrer que f n'appartient pas au noyau de l'application $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_K, 0_{x,n}} \overset{\psi^{\#}}{\to} \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_K, 0_{x,n}} \to \mathcal{O}_{\mathbb{A}^1_{\mathscr{H}(x)}, 0}$. Or le noyau de l'application de droite est exactement $(T_1 - \alpha_1, \ldots, T_{n-1} - \alpha_{n-1})$. Il suffit donc de constater que f n'appartient pas à l'ensemble suivant :

$$(\psi^{\#})^{-1}(T_1 - \alpha_1, \ldots, T_{n-1} - \alpha_{n-1}) = (T_1 - \alpha_1 - T_n^{u_1}, \ldots, T_{n-1} - \alpha_{n-1} - T_n^{u_{n-1}}).$$

□

Nous pouvons maintenant énoncer le Lemme dans le cas où x est un point quelconque.

Lemme 3.16. *Soit b un point de $B := \mathcal{M}(\mathcal{A})$. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{A}^{n-1}_{\mathcal{A}}$ au-dessus de b et $0_{x,n} \in \mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}$ le point rigide au-dessus de x correspondant à l'idéal (T_n) de $\kappa(x)[T_n]$. Quitte à échanger les variables, nous pouvons supposer qu'il existe $k \leq n$ tel que la projection sur les k premières variables de x que l'on notera x_k soit purement localement transcendant au-dessus de $\pi(x)$ et x soit rigide épais au-dessus de x_k.*

Soit f un élément de $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}, 0_{x,n}}$ tel que la restriction de f à $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_{\mathscr{H}(b)}, 0_{x,n}}$ soit non nulle. Il existe un isomorphisme ψ de $\mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}$ vérifiant les conditions suivantes :

- *$\psi(0_{x,n}) = 0_{x,n}$;*
- *$\psi^{\#}(f)$ soit non nul dans $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^1_{\mathscr{H}(x)}, 0_{x,n}}$;*
- *le diagramme suivant :*

$$\begin{tikzcd} \mathbb{A}^n_{\mathcal{A}} \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "p_{n,k}"] & \mathbb{A}^n_{\mathcal{A}} \arrow[d, "p_{n,k}"] \\ \mathbb{A}^k_{\mathcal{A}} \arrow[r, "Id_{\mathbb{A}^k_{\mathcal{A}}}"] & \mathbb{A}^k_{\mathcal{A}} \end{tikzcd}$$

est commutatif.

Démonstration du lemme. Soit $f \in \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_{\mathcal{A}},0_{x,n}}$ tel que la restriction de f à $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_{\mathscr{H}(b)},0_{x,n}}$ soit non nulle.

Soit V un voisinage compact spectralement convexe. Nous pouvons alors appliquer le lemme 3.15 à $f \in \mathcal{O}_{\mathbb{A}^{n-k}_{\mathcal{B}(V)},x} \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_{\mathcal{A}},x}$ où x est vu comme un point de l'espace affine $\mathbb{A}^{n-k}_{\mathcal{B}(V)}$ par l'identification usuelle. Il existe un $n-1$-uplet $u_k, \ldots, u_{n-1} \in \mathbb{N}$, tel que $\psi^{\#}_{(u_k,\ldots,u_{n-1})}(f)$ soit non nulle dans $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^1_{\mathscr{H}(x)},0_{x,n}}$. Mais l'isomorphisme ψ de $\mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}$ correspondant à l'isomorphisme de $\mathcal{A}[T_1, \ldots, T_n]$ de la forme suivante

$$\begin{cases} T_1 & \mapsto & T_1, \\ & \vdots & \\ T_k & \mapsto & T_k, \\ T_k & \mapsto & T_k + T_n^{u_k}, \\ & \vdots & \\ T_{n-1} & \mapsto & T_{n-1} + T_n^{u_{n-1}}, \\ T_n & \mapsto & T_n, \end{cases}$$

restreint à $\mathbb{A}^{n-k}_{\mathcal{B}(V)}$ est égale à $\psi_{(u_1,\ldots,u_{n-k-1})}$. Qui plus est, nous avons l'égalité $\psi(0_{x,n}) = 0_{x,n}$ et par construction de ψ le diagramme évoqué dans l'énoncé est bien commutatif. Ainsi l'isomorphisme $\psi : \mathbb{A}^n_{\mathcal{A}} \to \mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}$ convient. □

3.4 Fermeture des idéaux de type fini

Avant de nous attaquer à la démonstration de la fermeture des idéaux de types fini nous allons devoir montrer quelques résultats partiels. Ces cas particuliers correspondront au cas de l'idéal nul et de l'idéal engendré par une puissance d'une uniformisante (ce dernier cas n'a de sens que si le point est au-dessus d'un point dont l'anneau local est fortement de valuation discrète).

Commençons par montrer une conséquence directe de la définition d'anneau fortement de valuation discrète.

Lemme 3.17. *Soient $\mathcal{A}$ un anneau de Banach, b un point de $B := \mathcal{M}(\mathcal{A})$ tel que $\mathcal{O}_{B,b}$ est fortement de valuation discrète d'uniformisante π_b et $\mathcal{V}$ une base de voisinages compacts spectralement convexes satisfaisant les propriétés intervenant dans la définition d'anneau fortement de valuation discrète. Soit de plus $v \in \mathbb{N}^*$.*

L'idéal $(\pi_b^v) \subset \mathcal{O}_{B,b}$ est $\mathcal{B}$-fortement de type fini relativement à $\mathcal{V}$.

Démonstration du lemme. Nous allons démontrer le résultat par récurrence sur v. Le cas où $v = 1$ est dû au fait que $\mathcal{O}_{B,b}$ soit un anneau fortement de valuation discrète.

Supposons que nous ayons démontré l'énoncé pour tout v appartenant à $[\![0, v_0 - 1]\!]$. Montrons l'énoncé pour v_0.

Soient U un voisinage compact de b et $V \in \mathcal{V}$ un voisinage compact spectralement convexe de b dans $\mathring{U}$. Puisque $\mathcal{V}$ est une base fine de voisinages, il existe un voisinage compact spectralement convexe $V_1 \in \mathcal{V}$ de b dans $\mathring{U}$ tel que V soit inclus dans $\mathring{V}_1$. Soit f un germe appartenant à l'idéal $(\pi_b^{v_0}) \subset \mathcal{O}_{B,b}$ qui est $\mathcal{B}$-défini sur U.

Par définition d'anneau fortement de valuation discrète, il existe g appartenant à $\mathcal{B}(V_1)$ tel que $g\pi_b = f$ sur $\mathcal{B}(V_1)$ et tel que $\|g\|_{V_1} \leq K_{V_1,U}\|f\|_U$, où $K_{V_1,U}$ est la constante intervenant dans la définition d'anneau fortement de valuation discrète. De plus, puisque $\mathcal{O}_{B,b}$ est intègre, le germe au voisinage de b correspondant à g est un multiple de $\pi_b^{v_0-1}$. Nous pouvons maintenant appliquer l'hypothèse de récurrence à g, V_1 et V. On obtient qu'il existe une fonction h $\mathcal{B}$-définie sur V telle que $h\pi_b^{v_0-1} = g$ dans $\mathcal{B}(V)$ et vérifiant l'inégalité $\|h\|_V \leq K_{V,V_1,v_0-1}\|g\|_{V_1}$ où K_{V,V_1,v_0-1} est la constante intervenant dans la définition d'idéal $\mathcal{B}$-fortement de type fini de $(\pi_b^{v_0-1})$. Ainsi, on a l'égalité $h\pi^{v_0} = f$ dans $\mathcal{B}(V)$ et l'inégalité $\|h\|_V \leq K_{V,V_1,v_0-1}K_{V_1,U}\|f\|_U$. Nous avons l'énoncé souhaité pour la constante $K_{V,U,m_0} := K_{V,V_1,v_0-1}K_{V_1,U}$. □

Soit $b \in B$ un point tel que $\mathcal{O}_{B,b}$ soit fortement de valuation discrète. Nous allons maintenant donner un résultat de division par π_b^n pour les points rigides épais au-dessus de b. Nous pourrons ensuite l'utiliser en adjonction avec le Lemme 9.14 de [Poi13], pour avoir un contrôle sur les normes.

Lemme 3.18. *Soient x un point rigide épais de $\mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}$ au-dessus d'un point $b \in \mathcal{M}(\mathcal{A}) =: B$ tel que $\mathcal{O}_{B,b}$ soit un anneau fortement de valuation discrète et π_b une uniformisante de cet anneau.*

Il existe une base de voisinages jumelés $\mathcal{V}_{x,v}$ possédant la propriété suivante :

pour tout $(V, V') \in \mathcal{V}_{x,v}$ il existe une constante $K_{V',V,v} > 0$ telle que pour toute fonction f $\mathcal{B}$-définie sur V induisant un germe $f \in \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_{\mathcal{A}},x}$ appartenant à l'idéal engendré par π_b^v, il existe un unique germe $g_v \in \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_{\mathcal{A}},x}$ vérifiant les propriétés suivantes :

- *g_v est $\mathcal{B}$-définie sur V' ;*
- *$\|g_v\|_{V'} \leq K_{V',V,v}\|f\|_V$;*
- *$f = \pi_b^v g_v$ sur V'.*

Démonstration du lemme. Le résultat se démontre par récurrence sur la dimension n. Dans le cas où $n = 0$ cela provient du lemme 3.17.

Soit $n \geq 1$. Supposons que le résultat est vérifié en dimension $n-1$. On note x_{n-1} la projection de x sur ses $n-1$ premières coordonnées.

Commençons par montrer l'énoncé dans le cas où x est le point $0_{x_{n-1},n}$.

Ce point admet une base de voisinages de la formes $\overline{D}_W(t)$, où W parcours une base de voisinages de x_{n-1}. Puisque le germe induit par f en $0_{x_{n-1},n}$ appartient à l'idéal engendré par π_b^v, il existe un germe $g \in \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_{\mathcal{A}},0_{x_{n-1},n}}$ tel que $f = \pi_b^v g$ dans $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_{\mathcal{A}},0_{x_{n-1},n}}$.

Soit W et $t > 0$ tel que f, g et π_b soient $\mathcal{B}$-définies sur $\overline{D}_W(t)$ et tel que $f = \pi_b^v g$ dans $\mathcal{B}(\overline{D}_W(t))$. La Proposition 2.3 de [Poi13] assure que pour tout $0 < s < t$ nous avons les inégalités :

$$\|f\|_{W,s} \leq \frac{t}{t-s}\|f\|_{\overline{D}_W(t)},\ \|g\|_{W,s} \leq \frac{t}{t-s}\|g\|_{\overline{D}_W(t)}$$

où les normes de gauches sont les normes de f et g vues comme des éléments $\sum_{i\in\mathbb{N}} \alpha_i T^i$

et $\sum_{i\in\mathbb{N}} \beta_i T^i$ de $\mathcal{B}(W)\langle |T| \leq s\rangle$ (voir remarque 3.8). Nous avons alors la suite d'égalités

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} \alpha_i T^i = \pi_b^v \sum_{i\in\mathbb{N}} \beta_i T^i = \sum_{i\in\mathbb{N}} \pi_b^v \beta_i T^i.$$

Cela implique que pour tout i, $\alpha_i = \pi_b^v \beta_i$. Par hypothèse de récurrence, quitte à rétrécir W nous pouvons supposer que W appartient à un couple $(W, W') \in \mathcal{V}_{x_{n-1},v}$, et $\beta_{i,v} \in \mathcal{B}(W')$ tel que :

— $\|\beta_{i,v}\|_{W'} \leq K_{W',W,v} \|\alpha_i\|_W$ avec $K_{W',W,v}$ indépendant de i ;

— $\sum_{i\in\mathbb{N}} \alpha_i T^i = \pi_b^v \left(\sum_{i\in\mathbb{N}} \beta_{i,v} T^i\right)$ dans $\mathcal{B}(W')\langle |T| \leq s\rangle$.

Le couple (V, V') avec $V := \overline{D}_W(t)$ et $V' := \overline{D}_{W'}(s)$ et la constante $K_{V',V,v} := K_{W',W,v}\left(\frac{t}{t-s}\right)$ satisfont les hypothèses souhaitées. En effet, on note g_v l'image de $\sum_{i\in\mathbb{N}} \beta_{i,v} T^i$ par le morphisme $\mathcal{B}(W')\langle |T| \leq s\rangle \to \mathcal{B}(\overline{D}_{W'}(s))$.

— La fonction g_v est $\mathcal{B}$-définie sur V'.

— Nous avons la suite d'inégalités :

$$\begin{aligned} \|g_v\|_{V'} &\leq \|\sum_{i\in\mathbb{N}} \beta_{i,v} T^i\|_{W',s} \\ &\leq K_{W',W,v} \|\sum_{i\in\mathbb{N}} \alpha_i T^i\|_{W,s} \\ &\leq K_{W',W,v} \tfrac{t}{t-s} \|f\|_V. \end{aligned}$$

— Nous avons aussi l'égalité $f = \pi_b^v g_v$ sur V'.

Nous avons ainsi construit une base de voisinages jumelés et des constantes possédant les propriétés souhaitées.

Passons maintenant au cas où x est un point rigide épais quelconque au-dessus de x_{n-1}. Soit $P(S) \in \kappa(x_{n-1})[S]$ le polynôme unitaire minimal du point rigide épais x au-dessus de x_{n-1}. On note $\tilde{P} \in \mathcal{O}_{\mathbb{A}^{n-1}_{\mathcal{A}}, x_{n-1}}[S]$ un relèvement unitaire de P et d son degré. Soit $\tilde{U}$ un voisinage spectralement convexe de x_{n-1} tel que chacun des coefficients de $\tilde{P}$ soit $\mathcal{B}$-défini sur $\mathcal{B}(\tilde{U})$.

On note encore $\varphi_P : \mathbb{A}^1_{\mathcal{B}(\tilde{U})} \to \mathbb{A}^1_{\mathcal{B}(\tilde{U})}$ le morphisme d'espaces analytiques associé au polynôme $\tilde{P} \in \mathcal{B}(\tilde{U})[T]$. Ce morphisme envoie le point x sur le point $0_{x_{n-1},n}$. De plus, x est le seul antécédent de $0_{x_{n-1},n}$ par φ_P.

Nous réutilisons les notations de la partie 3.3 et en particulier l'isomorphisme

$$\psi_P : \mathcal{O}^d_{\mathbb{A}^1_{\mathcal{B}(\tilde{U})}} \to (\varphi_P)_* \left(\mathcal{O}_{\mathbb{A}^1_{\mathcal{B}(\tilde{U})}}\right).$$

D'après la partie précédente, il existe une base de voisinages jumelés $\mathcal{V}_{0_{x_{n-1},n}}$ et une famille de constantes $(K_{V,V',v})_{(V,V')\in\mathcal{V}_{0_{x_{n-1},n}}}$ satisfaisant les propriétés souhaitées.

Nous allons construire la base de voisinages jumelés souhaitée à partir de cette dernière.

Soit U un voisinage compact de x dans $\mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}$. Le théorème 3.14 assure qu'il existe un voisinage V de $\varphi_P(x)$ et une constante strictement positive $K_U > 0$ tels que pour tout $f \in \mathcal{O}_{\mathbb{A}^1_{\mathcal{B}(\tilde{U})},x}$ $\mathcal{B}$-définie sur U il existe $h \in \mathcal{B}(V)^d$ tel que $\psi_P(h) = f$ dans $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^1_{\mathcal{B}(\tilde{U})},x}$ et $\|h\|_V \leq K_U\|f\|_U$. Quitte à réduire V nous pouvons supposer que V est un élément d'un couple $(V, V') \in \mathcal{V}_{0_{x_{n-1},n}}$. De la même manière, il existe un voisinage U' de x et une constante strictement positive $K_{V'} > 0$ telles que pour tout $h \in \mathcal{O}^d_{\mathbb{A}^1_{\mathcal{B}(\tilde{U})},\varphi_P(x)}$ une section $\mathcal{B}$-définie sur V' il existe $f \in \mathcal{B}(U')$ tel que $\psi_P(h) = f$ dans $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^1_{\mathcal{B}(\tilde{U})},x}$ et $\|f\|_{U'} \leq K_{V'}\|h\|_{V'}$. Quitte à remplacer U' par $U' \cap U$, nous pouvons supposer que U' est inclus dans U.

Ainsi pour tout voisinage compact U, nous avons construit un couple (U, U') composé de voisinages de x. En faisant varier U parmi les voisinages compacts de x, nous construisons une base de voisinages jumelés que nous noterons $\mathcal{V}_x$. Il nous faut maintenant montrer qu'elle convient.

Soit $(U, U') \in \mathcal{V}_x$. On note $K_{U',U,v} := K_{V'}K_{V',V,v}K_U$. Soit $f \in \mathcal{O}_{\mathbb{A}^1_{\mathcal{B}(\tilde{U})},x} \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_{\mathcal{A}},x}$ appartenant l'idéal engendré par π^v_b et $\mathcal{B}$-définie sur U.

Il existe $h \in \mathcal{O}^d_{\mathbb{A}^1_{\mathcal{B}(\tilde{U})},\varphi_P(x)}$ qui est $\mathcal{B}$-définie sur V tel que $\psi_P(h) = f$ dans $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^1_{\mathcal{B}(\tilde{U})},x}$ tel que $\|h\|_V \leq K_U\|f\|_U$. Le fait que $(a_0, \ldots, a_{d-1}) := h = \psi_P^{-1}(f)$ assure que pour tout i les fonctions a_i appartiennent à l'idéal de $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^1_{\mathcal{B}(\tilde{U})},\varphi_P(x)}$ engendré par π^v_b. Ainsi le paragraphe précédent assure qu'il existe $g' \in \mathcal{B}(V')^d$ tel que $h = \pi^v_b g'$ sur V et $\|g'\|'_V \leq K_{V',V,v}\|h\|_V$.

Maintenant, il existe $g \in \mathcal{B}(U')$ tel que $\psi_P(g') = g$, avec $\|g\|_{U'} \leq K_{V'}\|g'\|_{V'}$. Ainsi nous avons l'égalité $\pi^v_b g = f$ sur U' et la suite d'inégalités :

$$\|g\|_{U'} \leq K_{V'}\|g'\|_{V'} \leq K_{V'}K_{V',V,v}\|h\|_V \leq K_{V'}K_{V',V,v}K_U\|f\|_U.$$

Ce qui est la condition requise. □

La proposition suivante montre que si b est tel que l'idéal nul de $\mathcal{O}_{B,b}$ est $\mathcal{B}$-fortement de type fini, l'anneau des germes au voisinage de tout $x \in \mathbb{A}^1_{\mathcal{A}}$ purement localement transcendant au-dessus de b vérifie la même propriété. C'est une généralisation du résultat 1.23 au cas des anneaux fortement de valuation discrète.

Proposition 3.19. *Soit $\mathcal{A}$ un anneau de Banach et b un point de $B := \mathcal{M}(\mathcal{A})$ tel que $\mathcal{O}_{B,b}$ soit fortement de valuation discrète ou un corps fort par rapport à une base de voisinages fine $\mathcal{V}_b$ formée d'ensembles compacts tels que tout élément de $\mathcal{V}_b$ possède un bord analytique fini si $\kappa(b)$ est un corps de caractéristique positive trivialement valué. Supposons que l'idéal nul de $\mathcal{O}_{B,b}$ soit $\mathcal{B}$-fortement de type fini par rapport à la base de voisinage $\mathcal{V}_b$.*

Soit x un point de $\mathbb{A}^1_{\mathcal{A}}$ purement localement transcendant au-dessus de $b \in B := \mathcal{M}(\mathcal{A})$ et $\mathcal{V}_x$ une base de voisinages telle que fournie par la proposition 3.6.

L'idéal nul de $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^1_{\mathcal{A}},x}$ est alors lui aussi $\mathcal{B}$-fortement de type fini par rapport à $\mathcal{V}_x$ (elle aussi fine).

Démonstration de la proposition. Commençons par remarquer que si b est tel que $\mathcal{O}_{B,b}$ est un corps fort l'énoncé est exactement la proposition 1.23. Nous supposerons donc que $\mathcal{O}_{B,b}$ est un anneau fortement de valuation discrète. Soit V un voisinage compact de x

et f une fonction $\mathcal{B}$-définie sur V telle que f soit nulle dans $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^1_{\mathcal{A}},x}$. Soit $\overline{D}_W(P; s, t) \in \mathcal{V}_x$ un voisinage de x dans $\mathring{V}$.

Nous allons montrer que f est nulle sur $\overline{D}_W(P; s, t)$. On choisit $0 < s' < s$, $t < t'$ et W' de telle sorte que $\overline{D}_{W'}(P; s', t')$ soit un encore un élément de $\mathcal{V}_x$ (l'existence de tels éléments est assurée par les axiomes de $\mathcal{V}_x$) et que l'on ait l'inclusion :

$$\overline{D}_W(P; s, t) \subset \overbrace{\overline{D}_{W'}(P; s', t')}^{\circ} \subset \overline{D}_{W'}(P; s', t') \subset \mathring{V}.$$

En vertu de la proposition 3.17 nous savons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, f est multiple de π^n dans $\mathcal{B}(\overline{D}_{W'}(P; s', t'))$. En conséquence, il découle de la seconde partie du corollaire 9.8 de [Poi13] que pour tout $s' < s'' < t'' < t'$, f est nulle au voisinage de $\overline{D}_{\{b\}}(P; s'', t'')$.

On choisit $s' < s'' < s < t < t'' < t'$. Nous savons que le morphisme naturel suivant :

$$\mathcal{B}(\overline{D}_{W'}(s'', t''))[S]/(P(S) - T) \to \mathcal{B}(\overline{D}_{W'}(P; s'', t''))$$

est un isomorphisme d'algèbres de Banach. Ainsi, la proposition 2.3 de [Poi13] assure qu'il y a deux morphismes bornés naturels

$$\mathcal{B}(\overline{D}_{W'}(P; s'', t'')) \to \mathcal{B}(W')\langle s \leq |T| \leq t\rangle[S]/(P(S) - T)$$

$$\mathcal{B}(W')\langle s \leq |T| \leq t\rangle[S]/(P(S) - T) \to \mathcal{B}(\overline{D}_{W'}(P; s, t))$$

tels que la composition de ces deux morphismes soit la restriction. On note encore f son image par le morphisme $\mathcal{B}(\overline{D}_{W'}(P; s'', t'')) \to \mathcal{B}(W')\langle s \leq |T| \leq t\rangle[S]/(P(S) - T)$. On écrit f sous la forme $\sum_{i=0}^{d-1} \alpha_i S^i$, où d est le degré du polynôme P et $\alpha_i := \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_{i,k} T^k$ est un élément $\mathcal{B}(W')\langle s \leq |T| \leq t\rangle$. Nous savons que f est nulle au voisinage de $\overline{D}_{\{b\}}(P; s'', t'')$, ce qui entraine que pour tout i et tout k, $a_{i,k}$ est nul au voisinage de b. Le fait que l'idéal nul soit $\mathcal{B}$-fortement de type fini par rapport à la base de voisinages $\mathcal{V}_b$ assure que tous les $a_{i,k}$ sont nuls sur W.

Ainsi f est nulle dans $\mathcal{B}(W)\langle s \leq |T| \leq t\rangle[S]/(P(S) - T)$. Et donc la restriction de f à $\mathcal{B}(\overline{D}_W(P; s, t))$ qui est égale à l'image de f par le morphisme d'algèbres de Banach $\mathcal{B}(W)\langle s \leq |T| \leq t\rangle[S]/(P(S) - T) \to \mathcal{B}(\overline{D}_W(P; s, t))$ est nulle également. □

Nous allons maintenant montrer le même énoncé dans le cas des points rigides épais.

Proposition 3.20. *Soient $\mathcal{A}$ un anneau de Banach, b un point de $B := \mathcal{M}(\mathcal{A})$ et une base de voisinages fine $\mathcal{V}_b$ formée d'ensembles compact tel que tout élément de $\mathcal{V}_b$ possède un bord analytique fini si $\kappa(b)$ est un corps de caractéristique positive trivialement valué. Supposons que l'idéal nul de $\mathcal{O}_{B,b}$ soit $\mathcal{B}$-fortement de type fini par rapport à la base de voisinages $\mathcal{V}_b$.*

Soit x un point de $\mathbb{A}^1_{\mathcal{A}}$ rigide épais au-dessus de $b \in B := \mathcal{M}(\mathcal{A})$.

Il existe une base de voisinages $\mathcal{V}_x$ vérifiant les mêmes propriétés que $\mathcal{V}_b$ telle que l'idéal nul de $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^1_{\mathcal{A}},x}$ soit lui aussi $\mathcal{B}$-fortement de type fini par rapport à $\mathcal{V}_x$.

Démonstration de la proposition. Soient $P \in \kappa(b)[T]$ le polynôme unitaire correspondant au point rigide épais x et $\tilde{P} \in \mathcal{B}(\tilde{W})[T]$ un relèvement unitaire de ce polynôme à coefficients dans $\mathcal{B}(\tilde{W})$ où $\tilde{W}$ est un voisinage compact de b. La remarque 3.7 assure qu'il existe une base de voisinage $\mathcal{V}_x$ satisfaisant les hypothèses de la proposition 3.6 telle que tout élément de $\mathcal{V}_x$ soit de la forme $\overline{D}_W(\tilde{P}, t)$ où W appartient à $\mathcal{V}_b$.

Soient U un voisinage compact de x, $\overline{D}_W(\tilde{P}, t) \in \mathcal{V}_x$ un voisinage de x inclus dans $\mathring{U}$ et f une fonction $\mathcal{B}$-définie sur U telle que le germe en x de f soit nul. Par hypothèse sur $\mathcal{V}_b$, il existe un voisinage $W_0 \in \mathcal{V}_b$ de W et un réel $t_0 > t$ tel que $\overline{D}_{W_0}(\tilde{P}, t_0)\mathcal{V}_x$ soit un voisinage de $\overline{D}_W(\tilde{P}, t)$ dans $\mathring{U}$.

On note $\displaystyle\sum_{i=0}^{\deg(Q_0)} \alpha_i S^i$ où $\alpha_i := \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} a_{i,k} T^k \in \mathcal{B}(W_0)\langle |T| \leq t\rangle$ l'image de f par le morphisme naturel

$$\mathcal{B}(\overline{D}_{W_0}(\tilde{P}; t_0)) \to \mathcal{B}(W_0)\langle |T| \leq t\rangle[S]/(\tilde{P}(S) - T).$$

Pour tout i et k, le germe induit par $a_{i,k}$ en b est nul. En effet, puisque le germe induit par f en x est nul, il existe $W_1 \subset W_0$ et $t_1 \leq t_0$ tels que f soit nulle sur $\overline{D}_{W_1}(\tilde{P}, t_1) \in \mathcal{V}_x$. Soit $t' > 0$ un réel strictement inférieur à $\min\{t_1, t\}$. Le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{B}(\overline{D}_{W_0}(\tilde{P}; t_0)) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{B}(\overline{D}_{W_1}(\tilde{P}, t_1)) \arrow[d] \\
\mathcal{B}(W_0)\langle |T| \leq t\rangle[S]/(\tilde{P}(S) - T) \arrow[r] & \mathcal{B}(W_1)\langle |T| \leq t'\rangle[S]/(\tilde{P}(S) - T).
\end{tikzcd}$$

Ainsi, pour tout i et k, la restriction de $a_{i,k}$ à W_1 est nulle.

Nous pouvons donc utiliser le fait que l'idéal nul de $\mathcal{O}_{B,b}$ soit $\mathcal{B}$-fortement de type fini par rapport à la base de voisinages $\mathcal{V}_b$ pour affirmer que pour tout i et k, $a_{i,k}$ est nul sur W. Ainsi par commutativité du diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{B}(\overline{D}_{W_0}(\tilde{P}; t_0)) \arrow[d] \arrow[dr] & \\
\mathcal{B}(W)\langle |T| \leq t\rangle[S]/(\tilde{P}(S) - T) \arrow[r] & \mathcal{B}(\overline{D}_W(\tilde{P}, t))
\end{tikzcd}$$

la fonction f est nul dans $\mathcal{B}(\overline{D}_W(\tilde{P}, t))$. Et donc l'idéal nul est $\mathcal{B}$-fortement de type fini dans $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^1_{\mathcal{A}},x}$ par rapport à la base de voisinage $\mathcal{V}_x$. $\square$

Nous allons maintenant synthétiser les propositions 3.19 et 3.20 dans le résultat suivant :

Proposition 3.21. *Soit $\mathcal{A}$ un anneau de Banach raisonnable et x un point de $\mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}$ au-dessus de $b \in B := \mathcal{M}(\mathcal{A})$. Supposons que l'idéal nul de $\mathcal{O}_{B,b}$ est $\mathcal{B}$-fortement de type fini par rapport à la base de voisinages $\mathcal{V}_b$ (qui est rappelons-le fine).*

Il existe une base de voisinages $\mathcal{V}_x$ vérifiant les mêmes propriétés que $\mathcal{V}_b$ telle que l'idéal nul de $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^1_{\mathcal{A}},x}$ soit lui aussi $\mathcal{B}$-fortement de type fini par rapport $\mathcal{V}_x$.

Démonstration de la proposition. Quitte à échanger les coordonnées nous pouvons supposer qu'il existe $k \in [\![0, n]\!]$ tel que la projection de x sur les k premières variables $x_k := p_{n,k}(x)$ soit purement localement transcendant au-dessus de $\pi(x)$ et tel que x soit rigide épais au-dessus de x_k.

Le fait qu'il existe une base de voisinages $\mathcal{V}_{x_k}$ satisfaisant les hypothèses souhaitées découle de la proposition 3.19 par récurrence en utilisant la remarque 1.16.

En utilisant une fois de plus une récurrence et la remarque 1.16, nous pouvons en déduire l'existence d'une base $\mathcal{V}_x$ satisfaisant les hypothèses souhaitées grâce à la proposition 3.20 cette fois-ci. □

Maintenant à l'aide du théorème de « division de Weierstraß avec contrôle sur les normes » que nous avons montré dans la partie précédente nous allons pouvoir montrer l'énoncé souhaité.

Pour montrer ce résultat, nous allons devoir nous placer dans un cadre plus restrictif que celui des anneaux de base.

Définition 3.22. Soit $\mathcal{A}$ un anneau de Banach. Nous dirons que $\mathcal{A}$ est de **base géométrique** si c'est un anneau de base tel que $B := \mathcal{M}(\mathcal{A})$ vérifie la propriété supplémentaire suivante : pour tout point $b \in B$ l'idéal nul de $\mathcal{O}_{B,b}$ est $\mathcal{B}$-fortement de type fini par rapport à une base de voisinage $\mathcal{V}_b$ de même type que celle intervenant dans la définition d'anneau fortement régulier (en particulier cette base de voisinage est fine).

Remarque 3.23.

— La propriété que nous ajoutons aux anneaux de base géométriques par rapport aux anneaux de base est un énoncé qui s'apparente au prolongement analytique et qui va nous être utiles au moment de la démonstration du résultat de fermeture des idéaux de type fini.

— Un anneau de Banach de base tel que $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ vérifie le principe du prolongement analytique et tel que pour tout $b \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$, $\mathcal{V}_b$ puisse être choisie de manière à être constituée de voisinages connexes est un anneau de base géométrique. Ainsi en particulier tout anneau d'entiers de corps de nombres est naturellement un anneau de base géométrique.

Soient x un point de $\mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}$ et $g := (g_1, \ldots, g_p) \in \mathcal{O}^p_{\mathbb{A}^n_{\mathcal{A}},x}$ un germe au voisinage de x. Soit maintenant V un voisinage compact de x dans $\mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}$ sur lequel f est définie. On note $\|g\|_V$ le maximum des normes spectrales $\|g_i\|_V$.

Le résultat suivant est en quelque sorte une généralisation à tout idéal du théorème 9.18 de [Poi13] et surtout du Théorème 6.6.19 de [Poi10], ce dernier n'étant énoncé qu'en dimension 1. La preuve suit de très près (avec les modifications nécessaire à notre cadre) celle du Théorème II.D.2 de [GR09].

Théorème 3.24. *Soient $\mathcal{A}$ un anneau de base géométrique, $x \in \mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}$ un point, U un voisinage ouvert de ce point et M un sous-module du module libre $\mathcal{O}^p_{U,x}$ engendré par les sections $(f_1, \ldots, f_l) \in (\mathcal{O}^p_{\mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}}(U))^l$.*

Il existe une base de voisinages jumelés spectralement convexes (c'est-à-dire que pour tout $(V, V') \in \mathcal{V}_{(x,f_1,\dots,f_l)}$*, V et V' sont spectralement convexes)* $\mathcal{V}_{(x,f_1,\dots,f_l)}$ *de x dans U, tels que pour tout* $(V, V') \in \mathcal{V}_{(x,f_1,\dots,f_l)}$ *il existe un réel positif* $K_{V',V} > 0$ *vérifiant la propriété suivante :*

pour toute section f appartenant $\mathcal{B}(V)^p$ induisant un germe $f \in \mathcal{O}^p_{\mathbb{A}^n_{\mathcal{A}},x}$ appartenant au sous-module engendré par les germes $(f_1, \dots, f_l)$, il existe $(a_i) \in \mathcal{B}(V')^l$ tel que :

— $f = \sum_{i=1}^{l} a_i f_i$ *dans* $\mathcal{B}(V')^p$ *;*
— *l'on ait l'inégalité* $\|a_i\|_{V'} \leq K_{V',V}\|f\|_V$ *pour tout* $i \in [\![1, l]\!]$.

Démonstration du théorème. Nous allons démontrer cet énoncé en plusieurs étape :

• *Pour $n \in \mathbb{N}$ fixé et $x \in \mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}$, le cas général découle du cas où $p = 1$:*

Nous allons montrer ce fait par récurrence. Soit p_0 un entier. Supposons que nous avons démontré l'énoncé pour $p \in [\![1, p_0 - 1]\!]$. Nous allons le montrer pour p_0.

Soit M un sous-module de $\mathcal{O}^{p_0}_{U,x}$ engendré par $(f_1, \dots, f_l) \in (\mathcal{O}^{p_0}_{\mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}}(U))^l$. Soient, maintenant, $(f'_1, \dots, f'_l)$ les projections de $(f_1, \dots, f_l)$ sur les p_0-1 premières coordonnées de $\mathcal{O}^{p_0}_{U,x}$, on note M' le sous-module de $\mathcal{O}^{p_0-1}_U$ engendré par $(f'_1, \dots, f'_l)$. On note aussi M'' le noyau de la projection sur les $p_0 - 1$ premières coordonnées $M \to M'$. Soient $(f''_1, \dots, f''_m) \in \mathcal{O}_{U,x}$ les générateurs de ce module (il n'y a qu'un nombre fini de générateurs car l'anneau $\mathcal{O}_{U,x}$ est nœthérien). Il existe une famille d'éléments $a_{i,j} \in \mathcal{O}_{U,x}$ telle que $f''_i = \sum_{j=1}^{l} a_{i,j} f_j$. Quitte à réduire U on peut supposer que les f_i, f'_i, f''_i, et $a_{i,j}$ sont définies sur U.

Maintenant nous allons construire $\mathcal{V}_{(x,f_1,\dots,f_l)}$. Un élément de $\mathcal{V}_{(x,f_1,\dots,f_l)}$ est un couple de voisinages (V, V') tel qu'il existe V_1 et V_2 avec (V, V_1) appartenant à $\mathcal{V}_{(x,f'_1,\dots,f'_l)}$ et (V_2, V') appartenant à $\mathcal{V}_{(x,f''_1,\dots,f''_m)}$ et vérifiant l'inclusion $V_2 \subset V_1$.

Soient $(V, V') \in \mathcal{V}_{(x,f_1,\dots,f_l)}$, $K'_{V_1,V}$ la constante correspondant à $(V, V_1) \in \mathcal{V}_{(x,f'_1,\dots,f'_l)}$ et K''_{V',V_2} la constante correspondant à $(V_2, V') \in \mathcal{V}_{(x,f''_1,\dots,f''_m)}$. Soit, maintenant, f une section $\mathcal{B}$-définie sur V telle que le germe de f en x appartienne à M. On note f' sa projection sur les $p_0 - 1$-premières coordonnées. Il existe une famille a'_{i,V_1} de sections $\mathcal{B}$-définies sur V_1 telle que $f' = \sum_{i=1}^{l} a'_{i,V_1} f'_i$ et telle que $\|a'_{i,V_1}\|_{V_1} \leq K'_{V_1,V}\|f'\|_V$. On note maintenant $f'' = f - \sum_{i=1}^{l} a'_{i,V_1} f_i$. Cette section appartient au noyau de la projection sur les $p_0 - 1$ premières variables. En utilisant l'hypothèse de récurrence sur M'' cette fois-ci, on obtient une famille de sections $a''_{i,V'}$ $\mathcal{B}$-définies sur V' telles que $f'' = \sum_{i=1}^{m} a''_{i,V'} f''_i$ et $\|a''_{i,V'}\|_{V'} \leq K''_{V',V_2}\|f''\|_{V_2}$.

Nous pouvons maintenant voir que $a_{i,V'} := a'_{i,V_1} + \sum_{j=1}^{m} a''_{j,V'} a_{j,i}$ convient pour une constante $K_{V',V}$ bien choisie. En effet, nous avons la suite d'égalité (sur V') :

$$\begin{aligned}
f &= f'' + \sum_{i=1}^{l} a'_{i,V_1} f_i \\
&= \sum_{j=1}^{m} a''_{j,V'} f''_j + \sum_{i=1}^{l} a'_{i,V_1} f_i \\
&= \sum_{j=1}^{m} a''_{j,V'} (\sum_{i=1}^{l} a_{j,i} f_i) + \sum_{i=1}^{l} a'_{i,V_1} f_i \\
&= \sum_{i=1}^{l} \left(\sum_{j=1}^{m} a''_{j,V'} a_{j,i} + a'_{i,V_1} \right) f_i.
\end{aligned}$$

Nous avons aussi la suite d'inégalités :

$$\begin{aligned}
\|a_{i,V'}\|_{V'} &\leq \|a'_{i,V_1}\|_{V'} + \sum_{j=1}^{m} \|a''_{j,V'}\|_{V'} \|a_{j,i}\|_{V'} \\
&\leq \|a'_{i,V_1}\|_{V_1} + (\sum_{j=1}^{m} \|a_{j,i}\|_{V'}) K''_{V',V_2} \|f''\|_{V_2} \\
&\leq K'_{V_1,V} \|f'\|_V + (\sum_{j=1}^{m} \|a_{j,i}\|_{V'}) K''_{V',V_2} \|f''\|_{V_1} \\
&\leq K'_{V_1,V} \|f'\|_V + (\sum_{j=1}^{m} \|a_{j,i}\|_{V'}) K''_{V',V_2} (\|f\|_{V_1} + \sum_{i=1}^{l} \|a'_{i,V_1}\|_{V_1} \|f_i\|_{V_1}) \\
&\leq K'_{V_1,V} \|f'\|_V + (\sum_{j=1}^{m} \|a_{j,i}\|_{V'}) K''_{V',V_2} (\|f\|_{V_1} + (\sum_{i=1}^{l} \|f_i\|_{V_1}) K'_{V_1,V} \|f'\|_V) \\
&\leq (K'_{V_1,V} + (\sum_{j=1}^{m} \|a_{j,i}\|_{V'}) K''_{V',V_2} (1 + (\sum_{i=1}^{l} \|f_i\|_{V_1}) K'_{V_1,V}))) \|f\|_V.
\end{aligned}$$

Ainsi la constante $K_{V',V} := K'_{V_1,V} + (\sum_{j=1}^{m} \|a_{j,i}\|_{V'}) K''_{V',V_2} (1 + (\sum_{i=1}^{l} \|f_i\|_{V_1}) K'_{V_1,V})$ convient.

• *Montrons le cas où* $p = 1$.

Quitte à échanger les coordonnées, il existe $k \in [\![0, n]\!]$ tel que la projection x_k de x sur les k premières variables soit purement localement transcendante au-dessus de $\pi(x)$ qui est égale à $\pi(x_k)$ et tel que x soit rigide épais au-dessus de x_k.

Nous allons le montrer par récurence sur la valeur $n - k$.

• *Supposons que nous sommes dans le cas où* $n - k = 0$.

Dans ce cas, grâce à la proposition 1.23, ou bien $\mathcal{O}_{U,x}$ est un corps fort, ou bien $\mathcal{O}_{U,x}$ est un anneau fortement de valuation discrète.

Intéressons-nous au premier cas. Les deux seuls idéaux de l'anneau local en x sont l'idéal nul et l'anneau tout entier. Si nous sommes dans le cas de l'idéal nul, quitte à réduire U, on peut supposer que les f_i sont nulles, au quel cas l'énoncé découle de la définition d'un corps fort. Si nous sommes dans le cas où l'idéal est l'anneau tout entier alors il existe i_0 tel que la section f_{i_0} soit non nulle dans $\mathcal{O}_{U,x}$. Ainsi, il existe un voisinage compact spectralement convexe U' tel que f_{i_0} soit $\mathcal{B}$-défini sur U' et f_{i_0} inversible dans $\mathcal{B}(U')$. Dans ce cas là, on note $\mathcal{V}_{(x,f_1,\ldots,f_l)}$ l'ensemble des couples de voisinages spectralement convexes (V, V') tels que V soit inclus dans $\mathring{U}'$ et V' inclus dans $\mathring{V}$. Soient $(V,V') \in \mathcal{V}_{(x,f_1,\dots,f_l)}$ et $f \in \mathcal{B}(V)$. On note alors le l-uplet $(a_1,\dots,a_l) \in (\mathcal{B}(V'))^l$ défini de la façon suivante : $a_i = 0$ pour tout $i \neq i_0$ et $a_{i_0} = f_{i_0}^{-1} f$. on a alors $f = \sum_{i=1}^{l} a_i f_i$ et $\|a_i\|_{V'} \leq \|f_{i_0}^{-1}\|_V \|f\|_V$, ce qui termine la preuve dans le cas d'un corps (nous pouvons remarquer que dans le cas où l'idéal est l'anneau tout entier nous n'avons utilisé que le fait que l'anneau local est un corps et non le fait que c'est un corps fort).

Supposons maintenant que $\mathcal{O}_{U,x}$ soit un anneau fortement de valuation discrète. Puisque l'anneau $\mathcal{O}_{U,x}$ est un anneau de valuation discrète, pour tout $i \in [\![1,l]\!]$ tel que f_i est non nul, nous avons une décomposition unique sous la forme suivante : $f_i = g_i \pi_x^{n_i}$ avec g_i un inversible de $\mathcal{O}_{U,x}$ et π_x une uniformisante de $\mathcal{O}_{U,x}$. Si pour tout $i \in [\![1,l]\!]$, f_i est nulle, l'énoncé est une conséquence de la proposition 3.21.

S'il existe $i \in [\![1,l]\!]$ tel que f_i soit non nulle. Si $f_i(x)$ est nulle, quitte à réduire U, nous sommes ramené au cas où l'idéal est engendré par un élément de la forme π_x^m. Ce cas est alors une conséquence du lemme 3.17. Si $f_i(x)$ est non nulle, l'idéal est l'anneau local tout entier, on reprend alors le raisonnement utilisé dans le cas d'un corps fort.

• *Procédons à l'ittération de la récurrence.*

Supposons que nous ayons démontré l'énoncé pour $p = 1$ et $n - k = N - 1$. Grâce à la première partie, cela implique que l'énoncé est vrai pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ et $n - k = N - 1$. Montrons l'énoncé dans le cas où $n - k = N$.

Soit U un voisinage ouvert de x dans $\mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}$. Soit maintenant M un sous-module de $\mathcal{O}_U$ engendré par les sections $(f_1,\dots,f_l)$.

Si toute ces fonctions sont des germes nuls le théorème est une conséquence de la proposition 3.21. Nous nous placerons donc à partir de maintenant dans le cas où un de ces germes est non nul. On note J l'ensemble des j tels que la section f_j induise un germe non nul au voisinage de x. Quitte à retrécir U, nous pouvons supposer que pour tout $i \notin J$ la section f_i est nulle sur U tout entier. Ainsi le sous-module de $\mathcal{O}_U$ engendré par les sections $(f_1,\dots,f_l)$ est le même que celui engendré par les sections $(f_j)_{j\in J}$. Puisque l'ensemble J est non vide, nous pouvons alors nous placer dans le cas où toutes les sections f_i induisent des germes non nuls en x.

Pour montrer cet énoncé nous allons montrer un premier lieu un cas particulier et en déduire le cas général.

• *Supposons que f_1 restreint à $\mathbb{A}^{n-k}_{\mathscr{H}(x_k)}$ soit non nul.*

Remarquons que ce fait ce sera toujours vérifié si b est un point tel que $\mathcal{O}_{B,b}$ soit un corps fort voir proposition 5.6.

Soient x_{n-1} la projection de x sur les $n-1$ premières variables et $P \in \kappa(x_{n-1})[T]$ le polynôme irréductible unitaire correspondant à x. On note W un voisinage spectralement convexe de x_{n-1} dans $\mathbb{A}^{n-1}_{\mathcal{A}}$ sur lequel les coefficients de P sont $\mathcal{B}$-définis. Puisque l'énoncé est local, pour le montrer nous pouvons nous placer dans $\mathbb{A}^1_{\mathcal{B}(W)}$.

Soit $\varphi_P : \mathbb{A}^1_{\mathcal{B}(W)} \to \mathbb{A}^1_{\mathcal{B}(W)}$ le morphisme d'espaces analytiques induit par le morphisme d'algèbres $\mathcal{B}(W)[T] \to \mathcal{B}(W)[T]$ qui envoie T sur P. Il envoie x sur $0_{x_{n-1},n}$ et, de plus, x est le seul antécédent de $0_{x_{n-1},n}$. Grâce à ce morphisme, il suffit de montrer l'énoncé dans le cas où x est le point $0_{x_{n-1},n}$.

En effet, supposons que l'énoncé soit vrai pour $0_{x_{n-1},n}$. Nous allons considérer l'isomorphisme ψ_P et son inverse définis dans le théorème 3.14. Cet isomorphisme induit un isomorphisme au niveau de la fibre en x, $\psi_P : \mathcal{O}^d_{\mathbb{A}^n_{\mathcal{A}},0_{x_{n-1},n}} \to (\varphi_P)_*(\mathcal{O}_{\mathbb{A}^1_{\mathcal{B}(W)}})_{0_{x_{n-1},n}} \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_{\mathcal{A}},x}$. On note e_i l'élément de $\mathcal{O}^d_{\mathbb{A}^n_{\mathcal{A}},0_{x_{n-1},n}}$ qui vaut 0 sur toutes les coordonnées sauf la i-ème où il vaut 1. On note maintenant $f_{i,j} := \psi_P(e_i)f_j$ pour i appartenant à $[\![1,d]\!]$ et j appartenant à $[\![1,l]\!]$. Le sous-$\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_{\mathcal{A}},0_{x_{n-1},n}}$-module de $\mathcal{O}^d_{\mathbb{A}^n_{\mathcal{A}},0_{x_{n-1},n}}$ engendré par les sections $\psi_P^{-1}(f_{i,j})$ est égal en tant qu'ensemble à $\psi_P^{-1}(M)$.

Soit $f \in M \subset \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_{\mathcal{A}},x} \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{A}^1_{\mathcal{B}(W)},x}$ un germe $\mathcal{B}$-défini sur un voisinage spectralement convexe V de x. Le théorème 3.14 assure qu'il existe un voisinage spectralement convexe U de $0_{x_{n-1},n}$ et une constante $K_{U,V} > 0$ (ne dépendant que de V) sur lequel le germe correspondant dans $\mathcal{O}^d_{\mathbb{A}^n_{\mathcal{A}},0_{x_{n-1},n}}$ est $\mathcal{B}$-défini et tel que $\|\psi_P^{-1}(f)\|_U \le K_{U,V}\|f\|_V$. Quitte à rétrécir U nous pouvons supposer qu'il appartient à un couple $(U,U') \in \mathcal{V}_{0_{x_{n-1},n},(\psi_P^{-1}(f_{i,j}))}$. Maintenant l'énoncé permet de dire qu'il existe des coefficients $b_{i,j} \in \mathcal{B}(U')$ tel que l'on ait l'égalité $\psi_P^{-1}(f) = \sum b_{i,j}f_{i,j} \in \mathcal{B}(U')^d$ et $\max \|b_{i,j}\|_{U'} \le K_{U',U}\|\psi_P^{-1}(f)\|_U$. Enfin, on note $a_j := \displaystyle\sum_{i=1}^{d} \psi_P(b_{i,j})$ dans $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^1_{\mathcal{B}(W)},x}$. Le théorème 3.14 assure qu'il existe un voisinage spectralement convexe V' de x et une constante $K_{V',U'} > 0$ (ne dépendant que de U') sur lequel les germes a_j sont $\mathcal{B}$-définis et $\|a_j\|_{V'} \le K_{V',U'}d \max\|b_{i,j}\|_{U'}$. Ainsi le couple (V,V'), la constante $K_{V',V} := K_{V',U'}dK_{U',U}K_{U,V}$ et le l-uplet a_i conviennent.

En utilisant le fait que l'énoncé pour $p=1$ implique l'énoncé pour p quelconque, nous pouvons donc supposer que x est le point $0_{x_{n-1},n}$. Nous avons, de plus, supposé que f_1 est non nulle une fois restreint à $\mathbb{A}^{n-k}_{\mathscr{H}(x_k)}$, nous pouvons donc utiliser le lemme 3.15 pour nous ramener au cas où f_1 est non nulle une fois restreinte à $\mathbb{A}^1_{\mathscr{H}(x_{n-1})}$.

Nous allons maintenant pouvoir utiliser le théorème de division de Weierstraß sur f_1. Nous devrons en fait l'utiliser deux fois. Une première fois sous la forme énoncé par Poineau (le théorème 1.14), cela nous permettra d'exhiber une base de voisinages jumelés de x_{n-1} par hypothèse de récurrence, ensuite nous utiliserons le théorème de division de Weierstraß tel qu'énoncé dans le théorème 3.11 avec cette base de voisinages jumelés.

On note v la valuation T-adique de f_1 restreint à $\mathbb{A}^1_{\mathscr{H}(x_{n-1})}$. Le Théorème de division de Weierstraß 8.3 de [Poi13] assure que pour tout $f \in \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_{\mathcal{A}},x}$, il existe un unique couple $(f',\tilde{f}) \in \mathcal{O}^2_{\mathbb{A}^n_{\mathcal{A}},x}$ vérifiant :

— $f = f'f_1 + \tilde{f}$;

— $\tilde{f} := \sum\limits_{i=0}^{v-1}\tilde{b_i}T^i \in \mathcal{O}_{\mathbb{A}^{n-1}_{\mathcal{A}},x_{n-1}}[T]$ est un polynôme de degré strictement inférieur à v.

Soit $\tilde{M}$ le module constitué des germes de restes de la division que nous venons d'effectuer, autrement dit le module $\tilde{M} := \mathcal{O}_{\mathbb{A}^{n-1}_{\mathcal{A}},x_{n-1}}[S]_{\le v-1} \cap M$. On peut identifier ce module à un sous $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^{n-1}_{\mathcal{A}},x_{n-1}}$-module de $\mathcal{O}^v_{\mathbb{A}^{n-1}_{\mathcal{A}},x_{n-1}}$. Par nœthérianité de $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^{n-1}_{\mathcal{A}},x_{n-1}}$, quitte à prendre un voisinage ouvert suffisamment petit $\tilde{U}$ de x_{n-1} dans $\mathbb{A}^{n-1}_{\mathcal{A}}$, on peut supposer qu'il existe $(\tilde{f}_1,\ldots,\tilde{f}_{\tilde{l}}) \in \mathcal{O}^v_{\mathbb{A}^{n-1}_{\mathcal{A}}}(\tilde{U})$ telles que $\tilde{M}$ soit engendré par les germes induits par ces sections. Par définition de M, pour un ouvert suffisamment petit U, pour tout $i \in [\![1,\tilde{l}]\!]$ on peut écrire $\tilde{f}_i = \sum_{j=1}^{l} a_{i,j} f_j$ avec $a_{i,j} \in \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}}(U)$.

Par hypothèse de récurrence, il existe une base de voisinages jumelés spectralement convexes $\mathcal{V}_{(x_{n-1},\tilde{f}_1,\ldots,\tilde{f}_{\tilde{l}})}$ de x_{n-1} dans $\tilde{U}$ telle que pour tout $(\tilde{V},\tilde{V}') \in \mathcal{V}_{(x_{n-1},\tilde{f}_1,\ldots,\tilde{f}_{\tilde{l}})}$, il existe une constante $K_{\tilde{V}',\tilde{V}} > 0$ avec pour toute section $\tilde{f} \in \tilde{M}$ définie sur $\tilde{V}$, $\tilde{f}$ peut être écrite sous la forme $\sum_{i=1}^{\tilde{l}} \tilde{a}_i \tilde{f}_i = \tilde{f}$ dans $(\mathcal{B}(\tilde{V}'))^{v-1}$ avec $\tilde{a}_i \in \mathcal{B}(\tilde{V}')$ et les inégalités

$$\|\tilde{a}_i\|_{\tilde{V}'} \leq K_{\tilde{V}',\tilde{V}} \|\tilde{f}\|_{\tilde{V}} \tag{3.14}$$

pour tout $i \in [\![1,\tilde{l}]\!]$.

On peut donc écrire f de la façon suivante :

$$f = (f' + \sum_{j=1}^{\tilde{l}} \tilde{a}_j a_{1,j}) f_1 + \sum_{i=2}^{l} (\sum_{j=1}^{\tilde{l}} \tilde{a}_j a_{i,j}) f_i = \sum_{i=1}^{l} a_i f_i$$

avec $a_1 := f' + \sum_{j=1}^{\tilde{l}} \tilde{a}_j a_{1,j}$ et $a_i := \sum_{j=1}^{\tilde{l}} \tilde{a}_j a_{i,j}$ pour $i \in [\![2,n]\!]$.

Grâce à ces informations, nous allons construire la base de voisinages jumelés $\mathcal{V}_{(x,f_1,\ldots,f_l)}$. On applique le théorème de division de Weierstraß 3.11, cette fois-ci, avec pour $\mathcal{V}_{x_{n-1}}$ la base de voisinages jumelés $\mathcal{V}_{(x_{n-1},\tilde{f}_1,\ldots,\tilde{f}_{\tilde{l}})}$ et pour G la fonction f_1.

Il existe une base de voisinages jumelés spectralement convexes $\mathcal{V}_{x,f_1}$ telle que pour tout $f \in \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_{\mathcal{A}},x}$ et tout couple de voisinage compact $(V,V') \in \mathcal{V}_{x,f_1}$ de x, il existe un réel strictement positif $k_{V',V}$, vérifiant la propriété suivante :

si f est définie sur V, $\tilde{f}$ et f' sont $\mathcal{B}$-définies sur V' et nous avons les inégalités

$$\|f'\|_{V'} \leq k_{V',V} \|f\|_V \tag{3.15}$$

$$\|\tilde{f}\|_{V'} \leq k_{V',V} \|f\|_V \tag{3.16}$$

où $\tilde{f}$ et f' sont respectivement le reste et le quotient de la division de f par f_1. Cette base de voisinages jumelés $\mathcal{V}_{x,f_1}$ ne conviendra pas pour les propriétés que nous cherchons.

Soit $(V,V') \in \mathcal{V}_{x,f_1}$. Nous allons devoir rétrécir V' pour démontrer l'inégalité souhaitée. Nous savons que V et V' sont respectivement de la forme $\overline{D}_{\tilde{V}}(Q,r)$ et $\overline{D}_{\tilde{V}'}(Q,s)$ avec $\tilde{V}$ et $\tilde{V}'$ formant un couple $(\tilde{V},\tilde{V}') \in \mathcal{V}_{(x_{n-1},\tilde{f}_1,\ldots,\tilde{f}_{\tilde{l}})}$. Soit, $(\tilde{V}_1,\tilde{V}'_1) \in \mathcal{V}_{(x_{n-1},\tilde{f}_1,\ldots,\tilde{f}_{\tilde{l}})}$ tel que $\tilde{V}_1 \subset \tilde{V}'$. Nous nous retrouvons donc avec une suite de voisinage de x_{n-1} emboités :

$$\tilde{V}_1' \subset \tilde{V}_1 \subset \tilde{V}' \subset \tilde{V}.$$

Chacun de ces voisinages va nous être utile dans la démonstration de l'inégalité souhaitée.

Nous remplacerons (V,V') par le couple $(V,\overline{D}_{\tilde{V}_1'}(Q;s'))$ avec $s' \in]0,s[$. Nous noterons ce nouveau couple de voisinages de nouveau (V,V') pour des raisons de concision et nommerons $\mathcal{V}_{0_{x_{n-1},n},f_1,\ldots,f_l}$ la base de voisinages juemlés ainsi construite. Nous avons donc la suite d'inclusions suivante :

$$\overline{D}_{\tilde{V}_1}(Q;s') \subset \overline{D}_{\tilde{V}'}(Q;s) \subset \overline{D}_{\tilde{V}}(Q;r).$$

On note $\mathcal{V}_{(x,f_1,\ldots,f_l)}$ l'ensemble des (V,V') ainsi construits pour chaque $(V,V') \in \mathcal{V}_{x,f_1}$.

Montrons maintenant que cette base de voisinages jumelés convient.

Nous avons vu que $\tilde{f}$ peut être à la fois vue comme un élément de $\mathcal{B}(\tilde{V}_1')^v$ et comme un élément de $\mathcal{B}(\overline{D}_{\tilde{V}_1}(Q;s))$. Rappelons que grâce à la proposition 3.3 nous savons qu'il existe une constante $K_{\overline{D}_{\tilde{V}_1}(Q;s)}$ telle que

$$\|\tilde{f}\|_{V_1'} \leq K_{\overline{D}_{\tilde{V}_1}(Q;s)}\|\tilde{f}\|_{\overline{D}_{\tilde{V}_1}(Q;s)}. \tag{3.17}$$

On a donc a_1 qui est $\mathcal{B}$-défini sur $\overline{D}_{\tilde{V}_1}(Q;s')$ (comme somme d'un polynôme à coefficients dans $\mathcal{B}(\tilde{V}_1)$ et d'une fonction définie sur $\overline{D}_{\tilde{V}_1}(Q;s')$). Qui plus est, on a les inégalités suivantes :

$$\begin{array}{rcl}
\|a_1\|_{\overline{D}_{\tilde{V}_1}(Q;s')} & \leq & \|f'\|_{\overline{D}_{\tilde{V}_1}(Q;s')} + \sum_{j=1}^{\tilde{l}} \|\tilde{a}_j\|_{\overline{D}_{\tilde{V}_1}(Q;s')}\|a_{1,j}\|_{\overline{D}_{\tilde{V}_1}(Q;s')} \\
& \overset{(3.15)}{\leq} & k_{\overline{D}_{\tilde{V}_1}(Q;s'),V}\|f\|_V + \sum_{j=1}^{\tilde{l}} \|a_{1,j}\|_{\overline{D}_{\tilde{V}_1}(Q;s')}\|\tilde{a}_j\|_{\overline{D}_{\tilde{V}_1'}(Q;s')} \\
& = & k_{\overline{D}_{\tilde{V}_1}(Q;s'),V}\|f\|_V + \sum_{j=1}^{\tilde{l}} \|a_{1,j}\|_{\overline{D}_{\tilde{V}_1}(Q;s')}\|\tilde{a}_j\|_{\tilde{V}_1'} \\
& \overset{(3.14)}{\leq} & k_{\overline{D}_{\tilde{V}_1}(Q;s'),V}\|f\|_V + \sum_{j=1}^{\tilde{l}} \|a_{1,j}\|_{\overline{D}_{\tilde{V}_1}(Q;s')}K_{\tilde{V}_1',\tilde{V}_1}\|\tilde{f}\|_{\tilde{V}_1} \\
& \overset{(3.17)}{\leq} & k_{\overline{D}_{\tilde{V}_1}(Q;s'),V}\|f\|_V + \left(\sum_{j=1}^{\tilde{l}} \|a_{1,j}\|_{\overline{D}_{\tilde{V}_1}(Q;s')}\right) K_{\overline{D}_{\tilde{V}_1}(Q;s)}K_{\tilde{V}_1',\tilde{V}_1}\|\tilde{f}\|_{\overline{D}_{\tilde{V}_1}(Q;s')} \\
& \overset{(3.16)}{\leq} & \left(k_{\overline{D}_{\tilde{V}_1}(Q;s'),V} + \left(\sum_{j=1}^{\tilde{l}} \|a_{1,j}\|_{\overline{D}_{\tilde{V}_1}(Q;s')}\right) K_{\overline{D}_{\tilde{V}_1}(Q;s)}K_{\tilde{V}_1',\tilde{V}}k_{\overline{D}_{\tilde{V}_1}(Q;s'),V}\right)\|f\|_V
\end{array}$$

Nous pouvons faire de même pour les autres a_j de manière un peu plus simple. Nous avons donc démontré que la base de voisinage $\mathcal{V}_{0_{x_{n-1},n},f_1,\ldots,f_l}$ ainsi construite convient.

- *Plaçons nous enfin dans le cas où les f_i sont quelconques.*

Nous allons nous ramener au cas où f_1 est non nulle une fois restreinte à $\mathbb{A}^1_{\mathscr{H}(x_{n-1})}$. Nous avons déjà mentionné que si b est tel que $\mathcal{O}_{B,b}$ soit un corps fort tous les f_i vérifient cette condition. Ainsi, pour la suite, nous supposerons que b est tel que $\mathcal{O}_{B,b}$ est un anneau fortement de valuation discrète.

On note π_b une uniformisante de $\mathcal{O}_{B,b}$ et J le sous-ensemble de $[\![1,l]\!]$ constitué des i tel que f_i soit non nul au voisinage de x. Le Lemme 9.14 de [Poi13] assure qu'il existe $w \in \mathbb{N}$ tel que $f_i = \pi_b^w g_i$ pour tout $i \in J$ et tel qu'il existe i_0 avec g_{i_0} non nul dans $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^{n-k}_{\mathscr{H}(x_k)},x}$ (où x_k est la projection sur les k premières variables de x). Ainsi quitte à rétrécir U nous pouvons supposer que $f_i = \pi_b^w g_i$ pour tout $i \in J$ sur U et quitte à changer l'ordre des g_i

nous pouvons supposer que g_1 est non nul dans $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^{n-k}_{\mathscr{H}(x_k)},x}$.

Considérons $\mathcal{V}_{(x,g_1,\ldots,g_l)}$ une base de voisinages jumelés satisfaisant les hypothèses du théorème et pour tout couple $(V,V') \in \mathcal{V}_{(x,g_1,\ldots,g_l)}$ une constante $K_{V',V} > 0$ (leurs existences sont assurées par ce qui précède). Soit $\mathcal{V}_{x,v}$ une base de voisinages jumelés et pour tout couple de voisinage (V,V') une constante $K_{V',V,v} > 0$ tel que le triplet $(V,V',K_{V',V,v})$ satisfait les hypothèses du lemme 3.18.

Nous allons construire $\mathcal{V}_{(x,f_1,\ldots,f_l)}$ à partir de $\mathcal{V}_{(x,g_1,\ldots,g_l)}$ et $\mathcal{V}_{x,v}$. Un élément de $\mathcal{V}_{(x,f_1,\ldots,f_l)}$ est un couple de voisinages compacts spectralement convexes (V,V') tel qu'il existe un voisinage compact spectralement convexe de x, V_1 faisant du couple (V,V_1) un élément de $\mathcal{V}_{x,v}$ et un voisinage compact spectralement convexe de x, V_2 faisant du couple (V_2,V') un élément de $\mathcal{V}_{(x,g_1,\ldots,g_l)}$. Pour tout couple de voisinages $(V,V') \in \mathcal{V}_{(x,f_1,\ldots,f_l)}$, on pose la constante $K'_{V',V} := K_{V',V_2}K_{V_1,V,v}$.

Soit (V,V') un couple de voisinages $\mathcal{V}_{(x,f_1,\ldots,f_l)}$ et f une fonction $\mathcal{B}$-définie sur V induisant un germe $f \in \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_{\mathcal{A}},x}$ appartenant à l'idéal engendré par les sections f_i. Le germe $f \in \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_{\mathcal{A}},x}$ appartient à l'idéal engendré par π_b^w. On note g la fonction $\mathcal{B}$-définie sur V_1 telle que $\|g\|_{V_1} \leq K_{V_1,V,w}\|f\|_V$ et $f = \pi_b^w g$ dans V_1 dont l'existence est assurée par le lemme 3.18. Puisque l'anneau $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_{\mathcal{A}},x}$ est intègre (il est régulier d'après le théorème 1.29) le germe de $g \in \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_{\mathcal{A}},x}$ appartient donc à l'idéal engendré par les sections g_i. Ainsi, il existe α_i, $\mathcal{B}$-définies sur V' tel que $\sum_{i=1}^{l} \alpha_i g_i = g$ dans $\mathcal{B}(V')$ et $\|\alpha_i\|_{V'} \leq K_{V',V_2}\|g\|_{V_2}$. Ainsi, nous avons l'égalité $\sum_{i=1}^{l} \beta_i f_i = \sum_{i=1}^{l} \beta_i \pi_b^w g_i = \pi_b^w g = f$ et l'inégalité

$$\begin{array}{rcl} \|\alpha_i\|_{V'} & \leq & K_{V',V_2}\|g\| \\ & \leq & K_{V',V_2}K_{V_1,V,w}\|f\|_V \end{array}.$$

Ainsi la base de voisinages jumelés $\mathcal{V}_{(x,f_1,\ldots,f_l)}$ et les constantes $K'_{V,V'}$ satisfont les conclusions du théorème. □

Corollaire 3.25. *Soit $\mathcal{A}$ un anneau de base géométrique, $x \in \mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}$ un point, U un voisinage ouvert de x et $\mathcal{I}$ un idéal de $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n\mathcal{A}}$ engendré par les germes $(f_1,\ldots,f_l)$.*

Soit $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions $\mathcal{B}$-définies sur un voisinage compact V de x dans U. Supposons que $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit une suite convergente pour la norme uniforme sur V et que pour tout n le germe en x induit par g_n appartienne à $\mathcal{I}$. Le germe en x induit par la fonction limite $g \in \mathcal{B}(V)$ appartient encore à l'idéal $\mathcal{I}$.

Démonstration du corollaire. Le théorème 3.24 assure qu'il existe un voisinage compact V' de x dans V et un réel positif $K_{V',V} > 0$ vérifiant la propriétée suivante :

Pour toute fonction g appartenant à $\mathcal{B}(V)$ induisant un germe en x appartenant à l'idéal $\mathcal{I}$, il existe $(a_i) \in \mathcal{B}(V')^l$ tel que :

— $g = \sum_{i=1}^{l} a_i f_i$ dans $\mathcal{B}(V')$;

— l'on ait l'inégalité $\|a_i\|_{V'} \leq K_{V',V}\|f\|_V$ pour tout $i \in [\![1,l]\!]$.

On note encore $(g_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ une sous-suite de $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout $k \in \mathbb{N}$ nous avons l'inégalité $\|g_{n_{k+1}} - g_{n_k}\|_V \leq 1/2^k$ (ce qui est possible car $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy). Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note $(a_{i,k})_{i\in[\![1,l]\!]}$ le l-uplet de fonctions $\mathcal{B}$-définies sur V' telles que $g_{n_{k+1}} - g_{n_k} = \sum_{i=1}^{l} a_{i,k} f_i$ dans $\mathcal{B}(V')$ et $\|a_{i,k}\|_{V'} \leq K_{V',V} 1/2^k$. On note $a_i := \lim_{K\to+\infty} \sum_{k=0}^{K} a_{i,k}$ (où la limite est prise dans $\mathcal{B}(V')$). Par unicité de la limite nous avons égalité entre g et $\sum_{i=1}^{l} a_i f_i$ sur V'. Ainsi le germe en x induit par g appartient à l'idéal $\mathcal{I}$. $\square$

Chapitre 4

Description de la catégorie des espaces analytiques sur un anneau de base géométrique

Dans ce chapitre nous montrerons que, si $\mathcal{A}$ est un anneau de base géométrique, il existe un foncteur d'analytification de la catégorie des schémas de présentation finis sur $\mathcal{A}$ dans cette catégorie. Ensuite, nous montrerons qu'elle admet un produit fibré. Enfin, nous verrons que nous pouvons procéder des extensions des scalaires dans $\mathcal{A} - An$, ce qui nous sera utile par la suite pour effectuer des raisonnements sur les points des espaces analytiques.

La démonstration de ces trois résultats utilise de manière crucial le théorème 3.24.

4.1 Exemples d'espaces analytiques et de morphismes

Dans cette partie $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ désigneront des anneaux de base géométriques.

Une grande source d'exemples d'espaces analytiques va nous venir de la théorie des schémas. Plus précisément, nous allons construire un foncteur de la catégorie des schémas de présentation finie sur $\mathcal{A}$ dans la catégorie des espaces analytiques sur $\mathcal{A}$, caractérisé par une propriété universelle. Afin de construire ce foncteur nous allons avoir besoin de la description attendue de l'ensemble des morphismes d'un espace analytique X vers un espace affine de dimension n, $\mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}$.

Pour énoncer la proposition qui suit nous allons reprendre les notations introduites au moment de la définition de la catégorie $\mathcal{A} - An$ des espaces analytiques au-dessus de $\mathcal{A}$.

Proposition 4.1. *Soient $f : \mathcal{B} \to \mathcal{B}'$ un morphisme borné de $\mathcal{A}$-algèbres de Banach et X un espace $\mathcal{B}'$-analytique. L'application*

$$\begin{array}{rccc} s : & \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}-An,f}(X, \mathbb{A}^n_{\mathcal{B}}) & \to & \mathcal{O}_X(X)^n \\ & \varphi & \mapsto & (\varphi^{\#}(T_1), \dots, \varphi^{\#}(T_n)) \end{array}$$

où les T_i sont les fonctions coordonnées de $\mathbb{A}^n_{\mathcal{B}}$, visiblement fonctorielle en X, est bijective.

Démonstration de la proposition. Commençons par remarquer que cette application donne bien lieu à un morphisme de foncteurs. En effet, soit $(\psi, \psi^\#) : (Y, \mathcal{O}_Y) \to (X, \mathcal{O}_X)$, on a alors l'égalité suivante :

$$s(((\varphi \circ \psi), (\varphi \circ \psi)^\#)) = (\psi^\#(\varphi^\#(T_1)), \ldots, \psi^\#(\varphi^\#(T_n))) = \psi^\#(s((\varphi, \varphi^\#)).$$

C'est équivalent à la fonctorialité de l'application.

Maintenant par fonctorialité et étant donné que les foncteurs de chaque coté du morphisme sont des faisceaux sur X, il suffit de montrer que le morphisme est localement injectif et surjectif. Ainsi, nous pouvons supposer que $(X, \mathcal{O}_X)$ est un sous-espace analytique $(j, j^\#) : (X, \mathcal{O}_X) \to (U, \mathcal{O}_U)$ d'un ouvert U de $\mathbb{A}^{n'}_{\mathcal{B}'}$.

Injectivité : Soient $(\varphi, \varphi^\#) : (X, \mathcal{O}_X) \to (\mathbb{A}^n_{\mathcal{B}}, \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_{\mathcal{B}}})$ et $(\varphi', \varphi'^\#) : (X, \mathcal{O}_X) \to (\mathbb{A}^n_{\mathcal{B}}, \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_{\mathcal{B}}})$ deux morphismes d'espaces analytiques au-dessus de f tels que l'on ait l'égalité suivante $(\varphi^\#(T_1), \ldots, \varphi^\#(T_n)) = (\varphi'^\#(T_1), \ldots.\varphi'^\#(T_n))$ et x un point de X. Commençons par montrer que $\varphi(x) = \varphi'(x)$. Par hypothèse, le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{B}[T_1, \ldots, T_n] \arrow[r] \arrow[d] & \kappa(\varphi(x)) \arrow[d] \\ \kappa(\varphi'(x)) \arrow[r] & \kappa(x) \end{tikzcd}$$

où $\mathcal{B}[T_1, \ldots, T_n] \to \kappa(\varphi(x))$ et $\mathcal{B}[T_1, \ldots, T_n] \to \kappa(\varphi'(x))$ sont les morphismes correspondant aux évaluations des polynômes en les points $\varphi(x)$ et $\varphi'(x)$. Or par la proposition 2.7, les morphismes $\kappa(\varphi(x)) \to \kappa(x)$ et $\kappa(\varphi'(x)) \to \kappa(x)$ sont des isométries. Ainsi les semi-normes correspondant à $\varphi(x)$ et $\varphi'(x)$ sont les mêmes, et ces deux points coïncident donc.

Soit $y \in \mathbb{A}^n_{\mathcal{B}}$. Il suffit de montrer que $\varphi^\# : \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_{\mathcal{B}},y} \to \varphi_*(\mathcal{O}_X)_y$ et $\varphi'^\# : \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_{\mathcal{B}},y} \to \varphi_*(\mathcal{O}_X)_y$ sont égaux.

Soient $f \in \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_{\mathcal{B}},y}$ et V un voisinage compact spectralement convexe de y dans $\mathbb{A}^n_{\mathcal{B}}$ sur lequel f est définie. Quitte à réduire V on peut supposer que f est limite pour la norme de $\mathcal{B}(V)$ d'une suite de fonctions rationnelles $\left(\frac{P_i}{Q_i}\right)$ sans pôle sur V. Pour montrer que $\varphi^\#(f)$ est égale à $\varphi'^\#(f)$ au voisinage de y, il suffit de montrer que quel que soit le point $x \in \varphi^{-1}(\mathring{V})$, les deux sections ont même germe en x.

Soit $x \in \varphi^{-1}(\mathring{V})$. Par définition d'un morphisme d'espaces analytiques, il existe un voisinage U' de $j(x)$ dans U tel que le diagramme suivant se complète en un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} (U', \mathcal{O}_{U'}) \arrow[r, dotted, "\exists"] & (\mathbb{A}^n_{\mathcal{B}}, \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_{\mathcal{B}}}) \\ (j^{-1}(U'), \mathcal{O}_{j^{-1}(U')}) \arrow[u, hook] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

où le morphisme d'espaces localement annelés horizontal est un morphisme entre ouverts d'espaces affines au-dessus de f. Qui plus est, quitte à prendre U' suffisamment petit on peut supposer qu'il convient pour φ et φ'. Nous noterons $(\tilde{\varphi}, \tilde{\varphi}^\#) : (U', \mathcal{O}_{U'}) \to (\mathbb{A}^n_{\mathcal{B}}, \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_{\mathcal{B}}})$

et $(\tilde{\varphi'}, \tilde{\varphi'}^{\#}) : (U', \mathcal{O}_{U'}) \to (\mathbb{A}^n_{\mathcal{B}}, \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_{\mathcal{B}}})$ des relèvements respectifs de φ et φ'. En revenant cette fois-ci à la définition d'un morphisme entre ouverts d'espaces affines, nous pouvons affirmer qu'il existe un voisinage spectralement convexe U'' de x dans U' tel que $\varphi(U'')$ soit inclus dans V et tel que pour tout $f \in \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_{\mathcal{B}}}(V)$ on ait $\|\tilde{\varphi}^{\#}(f)\|_{U''} \leq \|f\|_V$. Ainsi nous avons l'égalité suivante :

$$\tilde{\varphi}^{\#}(f) = \lim_{i \to +\infty} \tilde{\varphi}^{\#}\left(\frac{P_i}{Q_i}\right)$$

sur U''. Nous avons la même égalité pour $\tilde{\varphi'}^{\#}$. Quitte à réduire U'' on peut supposer que X est défini par un faisceau d'idéaux $\mathcal{I}$ engendré par les fonctions $(f_1, \ldots, f_l)$. Par hypothèse, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\tilde{\varphi}^{\#}(T_k) - \tilde{\varphi'}^{\#}(T_k)$ appartient à $\mathcal{I}$. Ainsi, pour tout entier $i \in \mathbb{N}$, $\tilde{\varphi}^{\#}\left(\frac{P_i}{Q_i}\right) - \tilde{\varphi'}^{\#}\left(\frac{P_i}{Q_i}\right)$ appartient à $\mathcal{I}$. On déduit du corollaire 3.25 que le germe $\tilde{\varphi}^{\#}(f) - \tilde{\varphi'}^{\#}(f)$ appartient à $\mathcal{I}$ et donc que $\varphi^{\#}(f) = \varphi'^{\#}(f)$.

Nous avons donc les égalités $\varphi^{\#} = \varphi'^{\#}$ et $\varphi = \varphi'$.

Surjectivité : Comme ce morphisme est injectif sa surjectivité se vérifie localement. On peut, donc, supposer que $(X, \mathcal{O}_X)$ est un sous-espace analytique d'un ouvert U de $\mathbb{A}^m_{\mathcal{B}}$. On note $(j, j^{\#}) : (X, \mathcal{O}_X) \to (U, \mathcal{O}_U)$ l'immersion naturelle. Soient $f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{O}_X(X)$ et $x \in X$. Par définition d'un sous-espace analytique de U, il existe un voisinage U' de $j(x)$ dans U tel que la restriction de chacune des sections f_i à $j^{-1}(U')$ appartienne à l'image du morphisme $j^{\#} : \mathcal{O}_U(U') \to \mathcal{O}_X(j^{-1}(U'))$. Ainsi quitte à réduire X et U, on peut supposer que les sections $f_1, \ldots, f_n$ peuvent s'étendre à U tout entier. On note $\tilde{f}_1, \ldots, \tilde{f}_n$ des relèvements de $f_1, \ldots, f_n$ à $\mathcal{O}_U(U)$. Par fonctorialité de l'application s, il suffit de montrer qu'il existe un morphisme $(\tilde{\varphi}, \tilde{\varphi}^{\#}) : (U, \mathcal{O}_U) \to (\mathbb{A}^n_{\mathcal{B}}, \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_{\mathcal{B}}})$ tel que l'on ait l'égalité $s((\tilde{\varphi}, \tilde{\varphi}^{\#})) = (\tilde{f}_1, \ldots, \tilde{f}_n)$.

On peut définir un morphisme d'espaces topologiques $\varphi : U \to \mathbb{A}^n_{\mathcal{B}}$ qui à $x \in U$ associe la semi-norme multiplicative :

$$\begin{array}{cccc} \varphi(x) : & \mathcal{B}[T_1, \ldots, T_n] & \to & \mathbb{R}^+ \\ & P & \mapsto & |P(\tilde{f}_1, \ldots, \tilde{f}_n)(x)| \end{array}.$$

Cette application est bien continue. En effet, il suffit de montrer que pour tout polynôme $Q \in \mathcal{B}[T_1, \ldots, T_n]$ et tout couple de réels positifs $s < t$, l'ensemble suivant

$$\varphi^{-1}(\{y \in \mathbb{A}^n_{\mathcal{B}} | \; s < |Q(y)| < t\})$$

est un ouvert. Or on a l'égalité :

$$\varphi^{-1}(\{y \in \mathbb{A}^n_{\mathcal{B}} | \; s < |Q(y)| < t\}) = \{x \in X | \; s < |Q(\tilde{f}_1, \ldots, \tilde{f}_n)(x)| < t\}.$$

Cet ensemble est un ouvert de U comme nous l'avons vu dans la remarque 2.15 .

Le morphisme $\varphi^{\#}$ est construit de la manière suivante. Soient $x \in U$ et $g \in \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_{\mathcal{B}}, \varphi(x)}$. Il existe un voisinage spectralement convexe V de $\varphi(x)$ sur lequel g est limite uniforme de fonctions rationnelles $\left(\frac{P_l}{Q_l}\right)_{l \in \mathbb{N}}$ sans pôle sur V. Soit U' un voisinage spectralement convexe de x dans $\varphi^{-1}(V)$.

La suite $\left(\frac{P_l(f_1,\ldots,f_n)}{Q_l(f_1,\ldots,f_n)}\right)_{l\in\mathbb{N}}$ *composée d'éléments de* $\mathcal{O}_U(U')$ *est convergente dans* $\mathcal{B}(U')$. *Pour montrer cela, il suffit de montrer que c'est une suite de Cauchy.*

Soient l et l' deux entiers positifs, la valeur $\|\frac{P_l(f_1,\ldots,f_n)}{Q_l(f_1,\ldots,f_n)} - \frac{P_{l'}(f_1,\ldots,f_n)}{Q_{l'}(f_1,\ldots,f_n)}\|_{U'}$ est égale au maximum des $|\frac{P_l(f_1,\ldots,f_n)}{Q_l(f_1,\ldots,f_n)}(y) - \frac{P_{l'}(f_1,\ldots,f_n)}{Q_{l'}(f_1,\ldots,f_n)}(y)|$ pour y appartenant à U'. Mais cette dernière valeur est égale à $|\frac{P_l}{Q_l}(\varphi(y)) - \frac{P_{l'}}{Q_{l'}}(\varphi(y))|$ avec $\varphi(y)$ appartenant à V, ainsi nous avons l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned}
\|\frac{P_l(f_1,\ldots,f_n)}{Q_l(f_1,\ldots,f_n)} - \frac{P_{l'}(f_1,\ldots,f_n)}{Q_{l'}(f_1,\ldots,f_n)}\|_{U'} &= \sup_{y\in U'}|\frac{P_l(f_1,\ldots,f_n)}{Q_l(f_1,\ldots,f_n)}(y) - \frac{P_{l'}(f_1,\ldots,f_n)}{Q_{l'}(f_1,\ldots,f_n)}(y)| \\
&\leq \sup_{z\in V}|\frac{P_l}{Q_l}(z) - \frac{P_{l'}}{Q_{l'}}(z)| \\
&= \|\frac{P_l}{Q_l} - \frac{P_{l'}}{Q_{l'}}\|_V.
\end{aligned}$$

C'est, donc, une suite de Cauchy. On note $\varphi^{\#}(g)$ la restriction à $\mathcal{O}_{U,j(x)}$ de la limite de $\left(\frac{P_l(f_1,\ldots,f_n)}{Q_l(f_1,\ldots,f_n)}\right)_{l\in\mathbb{N}}$ dans $\mathcal{B}(U')$. La construction de $\varphi^{\#}(g)$ ne dépend ni de la suite $\left(\frac{P_l}{Q_l}\right)_{l\in\mathbb{N}}$, ni des voisinages V et U'. En effet, il est toujours possible de rétrécir les voisinages et grâce à l'inégalité entre les normes utilisées précédemment pour tout autre suite de fonctions rationnelles sans pôle $\left(\frac{P'_l}{Q'_l}\right)_{l\in\mathbb{N}}$ convergeant vers g sur V, la suite $\left(\frac{P'_l(f_1,\ldots,f_n)}{Q'_l(f_1,\ldots,f_n)}\right)_{l\in\mathbb{N}}$ converge, elle aussi vers $\varphi^{\#}(g)$ sur U'.

L'inégalité précédente assure que le morphisme d'espaces localement annelés ainsi construit est bien un morphisme d'espaces analytiques. Qui plus est, par construction, on a l'égalité $s((\varphi,\varphi^{\#})) = (f_1,\ldots,f_n)$. □

Un cas particulier très important est le cas où $f = Id_{\mathcal{A}}$.

Corollaire 4.2. *Soient* $f : \mathcal{B} \to \mathcal{B}'$ *un morphisme de* $\mathcal{A}$*-algèbres de Banach,* $0 \leq r_i < s_i$ *pour* $i \in [\![1,k]\!]$ *une famille de réels positifs et* $(P_i)_{i\in[\![1,k]\!]} \in \mathcal{B}[T_1,\ldots,T_n]$ *une famille de* k *polynômes. On note* $U := \bigcap_{i=1}^k \{x \in \mathbb{A}^n_{\mathcal{B}} | r_i < |P_i(x)| < s_i\}$.

On note, aussi, $O_{P_1,\ldots,P_k}$ *le sous-ensemble de* $\mathcal{O}_X(X)^n$ *constitué des* n*-uplets* $(f_1,\ldots,f_n)$ *tels que pour tout* $x \in X$ *et tout* $i \in [\![1,k]\!]$, $r_i < |P_i(f_1,\ldots,f_n)(x)| < s_i$.

Pour tout $X \in An_{\mathcal{B}'}$, *l'application* s *induit une bijection entre* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}-An,f}(X,U)$ *et* $O_{P_1,\ldots,P_k}$

Démonstration du corollaire. Pour montrer le corolaire, il faut s'assurer qu'un morphisme d'espaces analytiques $(\varphi,\varphi^{\#}) : (X,\mathcal{O}_X) \to (\mathbb{A}^n_{\mathcal{B}}, \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_{\mathcal{B}}})$ se factorise par un ouvert U de $\mathbb{A}^n_{\mathcal{B}}$, si et seulement si pour tout $x \in X$, $\varphi(x)$ appartient à U. Cela provient juste du fait que pour tout $i \in [\![1,k]\!]$, on a l'égalité :

$$|P_i(\tilde{f}_1,\ldots,\tilde{f}_n)(x))| = |P_i(s((\varphi,\varphi^{\#})))(x)| = |P_i(\varphi(x))|.$$

□

Corollaire 4.3. *Soient* $f : \mathcal{B} \to \mathcal{B}'$ *un morphisme de* $\mathcal{A}$*-algèbres de Banach,* $0 \leq r_i < s_i$ *pour* $i \in [\![1,k]\!]$ *une famille de réels positifs et* $(P_i)_{i\in[\![1,k]\!]} \in \mathcal{B}[T_1,\ldots,T_n]$ *une famille de* k *polynômes. On note* $U := \bigcap_{i=1}^k \{x \in \mathbb{A}^n_{\mathcal{B}} | r_i \prec |P_i(x)| < s_i\}$.

Soit, maintenant, $(Q_j)_{i\in[\![1,l]\!]} \in \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_{\mathcal{B}}}(U)$ *pour* $j \in [\![1, l]\!]$ *une famille de* l *fonctions analytiques. On note* S *le sous-espace analytique de* U *défini par les* Q_j*, et* $I : S \to U$ *l'immersion fermée canonique. On note, de plus,* $(\varphi_j, \varphi_j^{\#}) : (U, \mathcal{O}_U) \to (\mathbb{A}^1_{\mathcal{B}}, \mathcal{O}_{\mathbb{A}^1_{\mathcal{B}}})$ *le morphisme correspondant à* Q_j*.*

On note, enfin, $N_{P_1,\ldots,P_k;Q_1,\ldots,Q_l}$ *l'ensemble des* n*-uplets* $(f_1, \ldots, f_n) \in \mathcal{O}_X(X)^n$ *tels que pour tout* $x \in X$ *et tout* $i \in [\![1, k]\!]$*,* $r_i \prec |P_i(f_1, \ldots, f_n)(x)| < s_i$ *et tel que, de plus, pour tout* $j \in [\![1, l]\!]$*,* $Q_j(f_1, \ldots, f_n) = 0$ *dans* $\mathcal{O}_X(X)$*.*

Pour tout $X \in An_{\mathcal{B}'}$*, l'application* s *induit une bijection entre* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}-An,f}(X, U)$ *et* $N_{P_1,\ldots,P_k,Q_1,\ldots,Q_l}$*.*

Démonstration du corollaire. Il s'agit de montrer qu'un morphisme de X vers U se factorise par S si et seulement si pour tout $j \in [\![1, l]\!]$, la section $Q_j(f_1, \ldots, f_n)$ est nulle dans $\mathcal{O}_X(X)$.

En effet, pour montrer que le morphisme $(\varphi, \varphi^{\#}) : (X, \mathcal{O}_X) \to (U, \mathcal{O}_U)$ se factorise par l'inclusion $(i, i^{\#}) : (S, \mathcal{O}_S) \to (U, \mathcal{O}_U)$, il suffit de montrer que $\varphi^{\#}(Q_j)$ est nul dans $\mathcal{O}_X(X)$. Or on a l'égalité $\varphi^{\#}(Q_j) = Q_j(f_1, \ldots, f_n)$. □

Une fois de plus, le cas particulier de ce corollaire où $f = Id_{\mathcal{A}}$ est très important. Nous allons l'utiliser dans ce qui suit.

Nous pouvons maintenant construire un foncteur de la catégorie des schémas de présentations finies au-dessus de $\mathcal{A}$ dans la catégorie des espaces $\mathcal{A}$-analytiques $An_{\mathcal{A}}$.

Soit X un schéma de présentation finie sur $\mathcal{A}$. Soit Φ le foncteur de la catégorie $An_{\mathcal{A}}$ dans la catégorie des ensembles qui à un espace analytique $\mathcal{X}$ associe l'ensemble des morphismes d'espaces localement $\mathcal{A}$-annelés de $\mathcal{X}$ dans X.

Théorème 4.4. *Le foncteur* Φ *est représentable par un objet* X^{an} *dans la catégorie des espaces* $\mathcal{A}$*-analytiques.*

Démonstration du théorème. Supposons que X soit un sous-schéma fermé engendré par un idéal de type fini d'un espace affine $\mathrm{Spec}(\mathcal{A}[T_1, \ldots, T_n])$. On note $f_1, \ldots, f_k$ des fonctions rationnelles appartenant à $\mathcal{A}[T_1, \ldots, T_n]$ formant des générateurs de l'idéal induit par le schéma X. Le foncteur Φ correspondant est représentable par le sous-espace analytique X^{an} de $\mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}$ défini par le faisceau d'idéaux engendré par $(f_1, \ldots, f_n)$. En effet, pour tout $\mathcal{X} \in An_{\mathcal{A}}$, $\Phi(\mathcal{X})$ est égal au sous-ensemble de $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}(\mathcal{X})^n$ constitué des n-uplets de sections $(g_1, \ldots, g_n)$ tels que pour tout $j \in [\![1, k]\!]$, $f_j(g_1, \ldots, g_n)$ est nulle. Cet ensemble est le même que $\mathrm{Hom}_{An_{\mathcal{A}}}(\mathcal{X}, X^{an})$ d'après la description donnée dans la proposition 4.3.

Passons maintenant au cas général. Soit X un schéma de présentation finie. Il admet un recouvrement $\{X_i\}_{i\in I}$ par des schémas de la forme précédente. Par un argument de propriété universelle nous pouvons recoller les X_i^{an} en un espace analytique X^{an} qui vérifie les propriétés désirées. Il faut pour cela vérifier que l'analytifié d'une immersion ouverte est encore une immersion ouverte.

Il suffit de remarquer que si l'on note $\rho : X^{an} \to X$ le morphisme naturel et $\varphi : Y \to X$ une immersion ouverte qui induit un isomorphisme entre Y et U un ouvert de X, φ^{an} induit un isomorphisme entre Y^{an} et $\rho^{-1}(U)$. Cela découle du fait que $\rho^{-1}(U)$ et Y^{an} représentent le même foncteur. □

4.2 Existence de produits fibrés et premières propriétés

Dans cette partie $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ désigneront des algèbres de base géométriques.

Nous allons montrer que la catégorie $An_{\mathcal{A}}$ admet un produit fibré. Nous démontrerons quelques résultats partiels dans ce sens dans la catégorie $\mathcal{A} - An$. Cependant, nous ne démontrerons pas que $\mathcal{A} - An$ admet des produits fibrés. En effet, plusieurs problèmes nous empêchent de montrer l'existence des produits fibrés dans cette catégorie plus grande.

Le premier est que pour tout $\mathcal{A}$-algèbre de Banach $\mathcal{B}$, $\mathcal{M}(\mathcal{B})$ appartient à $\mathcal{A} - An$. Or, il n'y a aucune raison pour que $\mathcal{B}$ soit une algèbre de Banach de base géométrique, elle n'entre donc pas dans le cadre de l'étude que nous avons fait dans la partie précédente qui est nécessaire pour montrer l'existence des produits fibrés.

Le second problème, qui est plus important, vient du fait que nous ne savons pas montrer que le produit tensoriel complété de deux $\mathcal{A}$-algèbres qui sont des algèbres de base géométriques est une algèbre de base géométrique. Ainsi, même si nous modifions notre définition pour ne prendre en compte que ces cas, nous ne parvenons toujours pas à montrer l'existence de produits fibrés.

Soient $\mathcal{B}$ une $\mathcal{A}$-algèbre, $\varphi : X \to Y$ et $\psi : Z \to Y$ des morphismes d'espaces $\mathcal{B}$-analytiques.

On note $\phi : \mathcal{B} - An \to ens$ le foncteur qui à tout espace analytique au-dessus de $\mathcal{B}$, T associe l'ensemble des diagrammes commutatifs d'espaces analytiques au-dessus de $\mathcal{B}$:

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r] \arrow[d] & Z \arrow[d] \\ X \arrow[r] & Y \end{tikzcd} .$$

Proposition 4.5. *Le foncteur ϕ est représentabe par un espace $\mathcal{B}$-analytique.*

En particulier, la catégorie $An_{\mathcal{A}}$ admet des produits fibrés.

Démonstration de la proposition. Commençons par montrer un cas particulier. Si X et Y sont deux espaces analytiques, il existe alors un produit $X \times Y$ (C'est un cas particulier car $\mathcal{M}(\mathcal{B})$ est un objet final de la catégorie).

Nous allons en premier lieu supposer qu'il existe $U := \bigcap_{i=1}^{k}\{x \in \mathbb{A}^n_{\mathcal{B}} | r_i \prec |P_i(x)| < s_i\}$ et $V := \bigcap_{j=1}^{k'}\{x \in \mathbb{A}^{n'}_{\mathcal{B}} | r'_j \prec |P'_j(x)| < s'_j\}$ tels que X et Y soient respectivement des sous-espaces analytiques de U et V définis par les systèmes d'équations $(Q_m)_{m\in[\![1,l]\!]}$ et $(Q'_p)_{p\in[\![1,l']\!]}$. On définit $U \times V$ comme étant l'ensemble suivant :

$$U \times V := \bigcap_{i=1}^{k}\{x \in \mathbb{A}^{n'+n}_{\mathcal{B}} | r_i \prec |P_i(x)| < s_i\} \cap \bigcap_{j=1}^{k'}\{x \in \mathbb{A}^{n'+n}_{\mathcal{B}} | r'_j \prec |P'_j(x)| < s'_j\}$$

où les P_i sont vus comme des polynômes en les n premières variables de $\mathcal{B}[T_1, \ldots, T_{n'+n}]$ et les P'_j comme des polynômes en les n' dernières variables. Cet ensemble est un ouvert de $\mathbb{A}^{n'+n}_{\mathcal{B}}$. On note maintenant $X \times Y$ le sous-espace analytique de $U \times V$ défini par les fonctions Q_l vues comme fonctions en les n premières variables et Q'_k vues comme fonctions en les n' dernières variables.

Pour tout espace $\mathcal{B}$-analytique Z, la description de $\mathrm{Hom}_{An_\mathcal{B}}(Z,X)$, $\mathrm{Hom}_{An_\mathcal{B}}(Z,Y)$, et $\mathrm{Hom}_{An_\mathcal{B}}(Z,X\times Y)$ donnée dans le corollaire 4.3 (dans le cas où $f = Id_\mathcal{B}$) montre que $X\times Y$ est bien le produit de X et Y (et que $U\times V$ est bien le produit de U par V).

De la même manière pour tout morphisme borné de $\mathcal{A}$-algèbres de Banach $f:\mathcal{B}\to\mathcal{B}'$ et tout espace $\mathcal{B}'$-analytique Z, la description de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}-An,f}(Z,X)$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}-An,f}(Z,Y)$, et $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}-An,f}(Z,X\times Y)$ donnée dans le corollaire 4.3 montre que nous avons l'égalité $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}-An,f}(Z,X\times Y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}-An,f}(Z,X)\times \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}-An,f}(Z,Y)$.

On conclut maintenant la construction du produit cartésien dans le cas général grâce au fait que tout espace analytique est localement isomorphe à un espace de la forme ci-dessus et par recollement.

Il reste maintenant à traiter le cas général du produit fibré.

Soit $\varphi : Y\to X$ et $\psi : Z\to X$ deux morphismes d'espaces $\mathcal{B}$-analytiques. Supposons tout d'abord que l'espace analytique X (resp. Y, Z) est le sous-espace analytique de l'ensemble $U := \bigcap_{i=1}^{k}\{x\in \mathbb{A}^n_\mathcal{B}|r_i \prec |P_i(x)| < s_i\}$ (resp. le sous-espace analytique de l'ensemble $V := \bigcap_{i=1}^{k'}\{x\in \mathbb{A}^{n'}_\mathcal{B}|r'_i \prec |P'_i(x)| < s'_i\}$, le sous-espace analytique de l'ensemble $W := \bigcap_{i=1}^{k''}\{x\in \mathbb{A}^{n''}_\mathcal{B}|r''_i \prec |P''_i(x)| < s''_i\}$) défini par les l (resp. l', l'') fonctions $Q_j\in\mathcal{O}_U(U)$ (resp. $Q'_j\in\mathcal{O}_V(V)$, $Q''_j\in\mathcal{O}_W(W)$). Grâce à la description explicite de $\mathrm{Hom}_{An_\mathcal{B}}(Y\times Z,X)$, les morphismes $Y\times Z\to Y\to X$, et $Y\times Z\to Z\to X$ correspondent chacun à un élément de $\mathcal{O}_{Y\times Z}(Y\times Z)^n$ que l'on notera $f=(f_1,\dots,f_n)$ et $g=(g_1,\dots,g_n)$. On note $Y\times_X Z$ le sous-espace analytique de $Y\times Z$ définit par les fonctions $f_1-g_1,\dots,f_n-g_n$.

Soit T un espace $\mathcal{A}$-analytique, en utilisant une fois de plus la description explicite donnée dans le corollaire 4.3 (dans le cas où $f = Id_\mathcal{B}$) nous obtenons une bijection naturelle entre $\mathrm{Hom}_{An_\mathcal{B}}(T,Y\times_X Z)$ et l'ensemble $\mathrm{Hom}_{An_\mathcal{B}}(T,Y)\times_{\mathrm{Hom}_{An_\mathcal{B}}(T,X)}\mathrm{Hom}_{An_\mathcal{B}}(T,Z)$.

De la même manière pour tout morphisme borné de $\mathcal{A}$-algèbres de Banach $f:\mathcal{B}\to\mathcal{B}'$ et tout espace $\mathcal{B}'$-analytique T, en utilisant une fois de plus la description explicite donnée dans le corollaire 4.3 nous obtenons une bijection naturelle entre $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}-An,f}(T,Y\times_X Z)$ et l'ensemble $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}-An,f}(T,Y)\times_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}-An,f}(T,X)}\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}-An,f}(T,Z)$

De la même manière que dans la partie précédente, on conclut dans le cas général du produit fibré grâce au fait que tout espace analytique est localement isomorphe à un espace de la forme ci-dessus et par recollement. □

Remarque 4.6. Remarquons que dans le cas où le produit fibré est le produit de deux ouverts d'espaces affines $U\subset\mathbb{A}^n_\mathcal{A}$ et $V\subset\mathbb{A}^m_\mathcal{A}$ l'espace analytique $U\times V$ s'identifie à l'ouvert de $\mathbb{A}^{n+m}_\mathcal{A}$ formé des points qui s'envoie dans U quand on les projettes sur les n premières variables et dans V quand on les projette sur les m dernières variables.

Nous allons maintenant montrer qu'il existe un foncteur d'extension des scalaires. Soient $f:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ un morphisme d'algèbres de Banach et X un espace $\mathcal{A}$-analytique. On note ϕ_X le foncteur qui à tout espace $\mathcal{B}$-analytique Y, associe l'ensemble des morphismes d'espaces analytiques au-dessus de f, $\varphi : Y\to X$.

Proposition 4.7. *Soit X un espace $\mathcal{A}$-analytique. Le foncteur $\phi_X : An_{\mathcal{B}} \to \mathrm{Ens}$ est représentable par un espace $\mathcal{B}$-analytique que nous noterons $X\widehat{\otimes}_{\mathcal{A}}\mathcal{B}$.*

Qui plus est, cette construction vérifie les deux propriétés suivantes :

- *le foncteur ainsi défini $\cdot\widehat{\otimes}_{\mathcal{A}}\mathcal{B} : An_{\mathcal{A}} \to An_{\mathcal{B}}$ commute au produit fibré ;*
- *pour tout morphisme de $\mathcal{A}$-algèbres de Banach $f' : \mathcal{B} \to \mathcal{B}'$ et tout morphisme d'espaces analytiques $\varphi : Y \to X$ au-dessus $f' \circ f$, il existe une unique factorisation de ce morphisme par $\varphi' : Y \to X\widehat{\otimes}_{\mathcal{A}}\mathcal{B}$ en morphisme d'espaces analytiques au-dessus de f'.*

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, dotted, "\exists!"'] \arrow[rr, bend left] \arrow[d] & X\widehat{\otimes}_{\mathcal{A}}\mathcal{B} \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d] \\
\mathcal{M}(\mathcal{B}') \arrow[r] & \mathcal{M}(\mathcal{B}) \arrow[r] & \mathcal{M}(\mathcal{A})
\end{tikzcd}$$

Démonstration de la proposition. Supposons dans un premier temps qu'il existe un ouvert $U := \bigcap_{i=1}^{k}\{x \in \mathbb{A}^n_{\mathcal{A}} | r_i \prec |P_i(x)| < s_i\}$ tel que X soit un sous-espace $\mathcal{A}$-analytique de U défini par le système d'équations $(Q_m)_{m\in[\![1,l]\!]}$. Par la description du corollaire précédent, nous savons ϕ_X est isomorphe au foncteur $\mathrm{Hom}_{An_{\mathcal{B}}}(\cdot, X\widehat{\otimes}_{\mathcal{A}}\mathcal{B})$ où $X\widehat{\otimes}_{\mathcal{A}}\mathcal{B}$ est le sous-espace $\mathcal{B}$-analytique de $U\widehat{\otimes}_{\mathcal{A}}\mathcal{B} := \bigcap_{i=1}^{k}\{x \in \mathbb{A}^n_{\mathcal{B}} | r_i \prec |\tilde{f}^{\#}(P_i)(x)| < s_i\}$ défini par le système d'équations $(\tilde{f}^{\#}(Q_m))_{m\in[\![1,l]\!]}$.

Passons maintenant au cas général. Soit X un espace $\mathcal{A}$-analytique. Il admet un recouvrement $\{X_i\}_{i\in I}$ par des espaces $\mathcal{A}$-analytiques de la forme précédente. Par un argument de propriété universelle nous pouvons recoller les $X_i\widehat{\otimes}_{\mathcal{A}}\mathcal{B}$ en un espace analytique $X\widehat{\otimes}_{\mathcal{A}}\mathcal{B}$ qui vérifie les propriétés désirées.

Enfin, pour montrer que le foncteur $\cdot\widehat{\otimes}_{\mathcal{A}}\mathcal{B}$ commute au produit fibré il suffit de remarquer que dans le cas considéré au début de cette démonstration l'image par $\cdot\widehat{\otimes}_{\mathcal{A}}\mathcal{B}$ du produit fibré de tels espaces et le produit fibré de l'image coïncide et ensuite de procéder par recollement. □

Nous pouvons maintenant déduire de la proposition 4.5 et de la proposition 4.7 l'existence d'un produit fibré dans un cas plus général. Nous avons choisi de séparer ces énoncés parce que l'expression du produit fibré est plus simple dans la petite catégorie des espaces $\mathcal{A}$-analytiques.

Soient $\varphi : X \to Y$ un morphisme d'espaces $\mathcal{A}$-analytiques, $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un morphisme d'algèbres de Banach, Z un espace $\mathcal{B}$-analytique et $\psi : Z \to Y$ un morphisme d'espaces analytiques au-dessus de f.

On note $\phi : \mathcal{B} - An \to ens$ le foncteur qui à tout espace analytique au-dessus de $\mathcal{B}$, T associe l'ensemble des diagrammes commutatifs d'espaces analytiques au-dessus de $\mathcal{A}$:

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[r] \arrow[d] & Z \arrow[d] \\
X \arrow[r] & Y
\end{tikzcd} .$$

Proposition 4.8. *Le foncteur ϕ est représentable par l'espace $(X\widehat{\otimes}_{\mathcal{A}}\mathcal{B}) \times_{Y\widehat{\otimes}_{\mathcal{A}}\mathcal{B}} Z$.*

Lorsque cela ne portera pas à confusion nous noterons, dans un souci de concision, cet espace $X \times_Y Z$.

Démonstration de la proposition. Commençons par remarquer qu'il existe deux morphismes $\phi' : (X \widehat{\otimes}_{\mathcal{A}} \mathcal{B}) \times_{Y \widehat{\otimes}_{\mathcal{A}} \mathcal{B}} Z \to Z$ et $\psi' : (X \widehat{\otimes}_{\mathcal{A}} \mathcal{B}) \times_{Y \widehat{\otimes}_{\mathcal{A}} \mathcal{B}} Z \to X$ tel que le diagramme d'espaces analytiques au-dessus de $\mathcal{A}$ soit commutatif :

$$\begin{tikzcd} (X \widehat{\otimes}_{\mathcal{A}} \mathcal{B}) \times_{Y \widehat{\otimes}_{\mathcal{A}} \mathcal{B}} Z \arrow[r] \arrow[d] & Z \arrow[d, "\psi"] \\ X \arrow[r, "\varphi"] & Y \end{tikzcd}$$

Pour montrer l'énoncé, il suffit de montrer montrer que pour tout diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r] \arrow[d] & Z \arrow[d] \\ X \arrow[r] & Y \end{tikzcd}$$

où T est un espace $\mathcal{B}$-analytique, il existe un unique morphisme $T \to (X \widehat{\otimes}_{\mathcal{A}} \mathcal{B}) \times_{Y \widehat{\otimes}_{\mathcal{A}} \mathcal{B}} Z$ factorisant ce diagramme.

Cela provient du fait que ce diagramme correspond à un unique diagramme commutatif d'espaces $\mathcal{B}$-analytiques :

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r] \arrow[d] & Z \arrow[d] \\ X \widehat{\otimes}_{\mathcal{A}} \mathcal{B} \arrow[r] & Y \widehat{\otimes}_{\mathcal{A}} \mathcal{B} \end{tikzcd} .$$

Maintenant par existence du produit fibré dans $An_{\mathcal{B}}$ ce dernier diagramme correspond à un unique morphisme $T \to (X \widehat{\otimes}_{\mathcal{A}} \mathcal{B}) \times_{Y \widehat{\otimes}_{\mathcal{A}} \mathcal{B}} Z$. □

Mettons d'ores et déjà en évidence un fait qui pourra s'avérer utile par la suite.

Corollaire 4.9. *Soient* $\varphi : X \to Y$ *et* $\psi : Z \to Y$ *des morphismes d'espaces analytiques.*

Le morphisme naturel $X \times_Y Z \to X \times Z$ *est une immersion.*

Démonstration du corollaire. C'est une simple conséquence de la construction du produit fibré. □

Nous allons pouvoir aussi introduire une définition.

Définition 4.10. Soit X un espace analytique. Nous dirons que X est **séparé au sens des espaces analytiques** si le morphisme diagonal $\Delta : X \to X \times X$ est une immersion fermée.

La proposition suivante va nous permettre, en particulier, d'affirmer que si un espace analytique a un espace topologique sous-jacent topologiquement séparé il est séparé au sens des espaces analytiques.

Proposition 4.11. *Soit $\varphi : X \to Y$ un morphisme d'espaces analytiques. Le morphisme $(\varphi, Id_X) : X \to Y \times X$ est une immersion. Si de plus Y est topologiquement séparé, (φ, Id_X) est une immersion fermée.*

Nous appellerons graphe de φ le sous-espace analytique $(\varphi, Id_Y)(X)$ de $X \times Y$. Nous le noterons G_φ.

Démonstration de la proposition. On note $p_1 : Y \times X \to Y$ et $p_2 : Y \times X \to X$ les deux projections naturelles.

Soit $z \in (\varphi, Id_X)(X)$. Nous allons montrer qu'il existe un voisinage W de z dans $Y \times X$ tel que $(\varphi, Id_X) : (\varphi, Id_X)^{-1}(W) \to W$ induise une immersion fermée. On note $x := p_2(z)$ et $y := p_1(z)$. Par définition de (φ, Id_X), on a $(\varphi, Id_X)(x) = z$ et $y = \varphi(x)$. Soient aussi, U et V deux voisinages, respectivement, de x dans X et y dans Y tel que $\varphi(U)$ soit inclus dans V. Par définition de morphisme d'espaces analytiques, quitte à choisir U et V suffisamment petits, on peut supposer que ce sont deux sous-espaces analytiques d'ouverts U' et V' d'espaces affines $\mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}$ et $\mathbb{A}^{n'}_{\mathcal{A}}$, tels que le diagramme suivant se complète dans la catégorie des espaces analytiques :

$$\begin{tikzcd} U' \arrow[r, dotted] & V' \\ U \arrow[u, hook] \arrow[r, "\varphi"] & V \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

où les flèches verticale sont des immersions fermées des sous-espaces analytiques. Quitte à réduire V et U de nouveau, on peut supposer que V et U sont isomorphes respectivement au sous-espace de V' défini par $Q_j \in \mathcal{O}_{V'}(V')$ et U' défini par les fonctions $Q'_j \in \mathcal{O}_{U'}(U')$. La proposition 4.3 nous permet d'affirmer que le morphisme $\varphi : U \to V$ correspond à n sections $(f_l) \in \mathcal{O}_{U'}(U')^n$.

Considérons, le sous-espace analytique de $V \times U$ défini par les fonctions $f_l - T_l$ pour l allant de 1 à n et f_l vues comme fonctions en les n' dernières variables. Nous noterons $G_{\varphi, V\times U}$ ce sous-espace analytique. Par construction, le morphisme $(\varphi, Id_U) : U \to V \times U$ se factorise par $G_{\varphi, V\times U}$. Qui plus est la restriction de p_2 à $G_{\varphi, V\times U}$ est un inverse à ce morphisme. En effet, le fait que $p_2 \circ (\varphi, Id_X) = Id_X$ est trivial. Pour montrer que l'on a l'égalité $(\varphi, Id_X) \circ p_2 = Id_{G_{\varphi, V\times U}}$ il suffit de constater que le morphisme $(\varphi, Id_X) \circ p_2$ correspond aux sections suivantes :

$$(T_1, \ldots, T_n, f_1, \ldots, f_{n'}) = (T_1, \ldots, T_n, T_{n+1}, \ldots, T_{n+n'}) \in \mathcal{O}_{G_{\varphi, V\times U}}(G_{\varphi, V\times U})^{n+n'}.$$

Ainsi le morphisme $(\varphi, Id_U) : U \to V \times U$ est une immersion fermée. On conclut alors que $(\varphi, Id_X) : X \to Y \times X$ est une immersion grâce à la proposition 2.18.

Supposons maintenant que Y soit séparé. Il nous faut montrer que $(\varphi, Id_X)(X)$ est un fermé de $Y \times X$. Soit z n'appartenant pas à $(\varphi, Id_X)(X)$. Dans ce cas on a $\varphi(p_2(z))$ différent de $p_1(z)$ dans Y. En effet, supposons que $\varphi(p_2(z)) = p_1(z)$, la seconde partie de la proposition 4.5 nous assure que le morphisme $\{z\} \to Y \times X$ ce factorise par l'espace analytique $X \simeq Y \times_Y X \to Y \times X$ qui n'est autre que le morphisme d'espaces analytiques $(\varphi, Id_X) : X \to Y \times X$. Puisque cet espace topologique est séparé, il existe deux ouverts disjoints U_1 et U_2 voisinages respectifs $p_1(z)$ et de $\varphi(p_2(z))$. L'ensemble $U_1 \times \varphi^{-1}(U_2)$ est un voisinage z qui est disjoint de $(\varphi, Id_X)(X)$. On pose $G_{\varphi, U_1 \times \varphi^{-1}(U_2)}$ l'ensemble vide. $\square$

À partir de maintenant nous dirons qu'une classe de morphismes $\mathbb{P}$ est **stable par changement de base** dans la catégorie $\mathcal{A}-An$ si elle vérifie les deux propriétés suivantes :

— pour tout morphisme d'espaces $\mathcal{B}$-analytiques $X \to Y$ appartenant à $\mathbb{P}$ et tout morphisme d'espaces $\mathcal{B}$-analytiques $Z \to Y$, le morphisme d'espace $\mathcal{B}$-analytiques obtenu après produit firbé $X \times_Y Z \to Z$ appartient à $\mathbb{P}$. Dans ce cas nous dirons que $\mathbb{P}$ est **stable par produit fibré**.

— pour tout morphisme d'espaces $\mathcal{B}$-analytiques $X \to Y$ appartenant à $\mathbb{P}$ et tout morphisme de $\mathcal{A}$-algèbres de Banach $\mathcal{B} \to \mathcal{B}'$, le morphisme d'espaces $\mathcal{B}'$-analytiques obtenu après extension des scalaires $X\widehat{\otimes}_{\mathcal{B}}\mathcal{B}' \to Y\widehat{\otimes}_{\mathcal{B}}\mathcal{B}'$ appartient à $\mathbb{P}$. Dans ce cas nous dirons que $\mathbb{P}$ est **stable par extension des scalaires**.

Nous allons maintenant pouvoir donner quelques propriétés de stabilité par changement de base.

Proposition 4.12. *La classe des immersions (resp. immersions ouvertes, resp. immersions fermées) est stable par changement de base.*

De plus, si l'on considère le carré cartésien d'espaces $\mathcal{B}$-analytiques suivant :

$$\begin{tikzcd} X \times_Y Z \arrow[r, "\chi"] \arrow[d, "\rho"] & Z \arrow[d, "\psi"] \\ X \arrow[r, "\varphi"] & Y \end{tikzcd}$$

où φ est une immersion (resp. immersion ouverte, resp. immersion fermée). ρ induit un homéomorphisme entre $X \times_Z Y$ et $\psi^{-1}(\varphi(X))$ (on rappelle que φ induit un isomorphisme entre X et son image dans Z). De même, si φ est l'immersion fermée correspondant au faisceau d'idéaux $\mathcal{I}$, le morphisme χ est l'immersion fermée correspondant au faisceau d'idéaux $\psi^*(\mathcal{I})$.

Démonstration de la proposition. Soit

$$\begin{tikzcd} X \times_Y Z \arrow[r, "\chi"] \arrow[d, "\rho"] & Z \arrow[d, "\psi"] \\ X \arrow[r, "\varphi"] & Y \end{tikzcd}$$

un carré cartésien dans $\mathcal{A} - An$, où φ est un morphisme d'espaces $\mathcal{B}$-analytiques. Nous traiterons simultanément la stabilité par extension des scalaires et par produit fibré. Le cas de la stabilité par produit fibré correspond au cas où ψ est un morphisme d'espaces $\mathcal{B}$-analytiques. Le cas de la stabilité par extension des scalaires correspond au cas où ψ est le morphisme $Y\widehat{\otimes}_{\mathcal{B}}\mathcal{B}' \to Y$ où $\mathcal{B} \to \mathcal{B}'$ est un morphisme de $\mathcal{A}$-algèbres de Banach.

Supposons dans un premier temps que φ est une immersion ouverte. Par définition φ induit un isomorphisme entre X et un ouvert U de Y. Nous allons montrer que l'espace analytique $\psi^{-1}(U)$ muni de la restriction du faisceau structural de Z est isomorphe au produit fibré $X \times_Y Z$. Soit

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "f"] & Z \arrow[d, "\psi"] \\ X \arrow[r, "\varphi"] & Y \end{tikzcd}$$

un diagramme commutatif. Le morphisme $f' : T \to Z$ se factorise de manière unique par $\psi^{-1}(U)$.

Soit $f : T \to \psi^{-1}(U)$ un morphisme. Le morphisme $\psi \circ f : T \to Z$ se factorise par U. Ainsi le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi^{-1}\circ\psi\circ f"'] & Z \arrow[d, "\psi"] \\ X \arrow[r, "\varphi"] & Y \end{tikzcd}$$

Ainsi $\psi^{-1}(U)$ est isomorphe à $X \times_Y Z$ et donc χ est une immersion ouverte.

Passons maintenant au cas où φ est une immersion fermée. Soit $\mathcal{I}$ le faisceau d'idéaux correspondant. Le but va être de montrer que $X \times_Y Z \to Z$ est l'immersion correspondant au faisceau d'idéaux $\psi^*(\mathcal{I})$. Grâce à la proposition 2.16, pour montrer cela il suffit de montrer qu'un morphisme $f : T \to Z$ se factorise par $\chi : X \times_Y Z \to Z$ si et seulement si $f^*(\psi^*(\mathcal{I}))$ est nul.

Soit un $f : T \to Z$ un morphisme qui se factorise en $\chi \circ f'$. On a alors le morphisme $\psi \circ f$ qui se factorise par φ. Ainsi $f^*(\psi^*(\mathcal{I}))$ est nul.

Supposons maintenant que $f : T \to Z$ est un morphisme tel que $f^*(\psi^*(\mathcal{I}))$ est nul. Le morphisme $\psi \circ f$ se factorise par φ. Ainsi on a un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, "f"] \arrow[d, "f'"'] & Z \arrow[d, "\psi"] \\ X \arrow[r, "\varphi"] & Y \end{tikzcd}$$

et donc par propriété universelle du produit fibré f se factorise par $\chi : X \times_Y Z \to Z$.

Il faut maintenant remarquer que l'ensemble sous-jacent au sous-espace analytique de Z induit par le faisceau d'idéaux $\psi^*(\mathcal{I})$ est égale au sous-ensemble $\psi^{-1}(\varphi(X))$.

Soit $y \in \chi(X \times_Y Z)$. Puisque le diagramme

$$\begin{tikzcd} X \times_Y Z \arrow[r, "\chi"] \arrow[d, "\rho"] & Z \arrow[d, "\psi"] \\ X \arrow[r, "\varphi"] & Y \end{tikzcd}$$

est commutatif $\psi(y)$ appartient à $\varphi(X)$. Soit $z \in \psi^{-1}(\varphi(X))$. Pour tout $f \in \mathcal{I}_{\psi(z)}$, on a $f(\psi(z)) = 0$. Ainsi pour tout $f \in f^*(\mathcal{I})_z \simeq \mathcal{I}_{\psi(z)} \otimes_{\mathcal{O}_{Y,\psi(z)}} \mathcal{O}_{Z,z}$ on a $f(z) = 0$. Autrement dit z appartient au sous-espace analytique induit par le faisceau d'idéaux $f^*(\mathcal{I})$.

Passons enfin au cas où φ est une immersion. Par définition nous avons $\varphi = \varphi_1 \circ \varphi_2$

avec $\varphi_1 : U \to Y$ une immersion ouverte et $\varphi_2 : X \to U$ une immersion fermée. On a ainsi le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} X \times_Y Z \arrow[r, "\chi_2"] \arrow[d, "\rho_2"] & U \times_Y Z \arrow[r, "\chi_1"] \arrow[d, "\rho_1"] & Z \arrow[d, "\psi"] \\ X \arrow[r, "\varphi_2"] & U \arrow[r, "\varphi_1"] & Y \end{tikzcd} .$$

Qui plus est, par propriété universelle on a $\chi = \chi_1 \circ \chi_2$ ce qui implique que χ est lui aussi une immersion. $\square$

Les remarques suivantes vont nous être utiles pour effectuer des raisonnements locaux sur des produits fibrés.

Remarque 4.13. Soit $n \geq m$ des entiers positifs et U un ouvert de $\mathbb{A}^m_{\mathcal{A}}$. Le morphisme naturel $p^{-1}_{n,m}(U) \to \mathbb{A}^{n-m}_{\mathcal{A}} \times_{\mathcal{M}(\mathcal{A})} U$ est un isomorphisme. C'est une conséquence immédiate de la proposition précédente.

4.3 Propriété du foncteur d'extension des scalaires

Dans cette section $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ seront des anneaux de bases géométriques.

Soit $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un morphisme d'algèbres de Banach. Nous allons étudier plus précisément certaine propriétés du foncteur d'extension des scalaires $\cdot\widehat{\otimes}_{\mathcal{A}}\mathcal{B} : An_{\mathcal{A}} \to An_{\mathcal{B}}$ dont l'existence est assurée par la proposition 4.7.

Avant d'énoncer la proposition qui suit, nous aurons besoin d'introduire une notation. Soit $(\mathcal{A}, \|\cdot\|)$ une algèbre de Banach. On note $\|\cdot\|_\infty$ la norme spectrale sur $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ et $\hat{\mathcal{A}}$ le séparé complété de l'anneau $\mathcal{A}$ pour cette norme.

Nous aurons aussi besoin de la définition suivante :

Définition 4.14. Soit $\varphi : X \to Y$ une application continue entre espaces topologiques séparés localement compacts. Nous dirons que φ est **propre** si pour tout compact K de Y, $\varphi^{-1}(K)$ est un ensemble compact.

Proposition 4.15. *Soient $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un morphisme entre algèbres de Banach de base géométriques, n un entier, et V une partie compacte spectralement convexe de $\mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}$. On note $\tilde{f} : \mathbb{A}^n_{\mathcal{B}} \to \mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}$ le morphisme naturel induit par f.*

Le morphisme $\tilde{f}$ est topologiquement propre. Qui plus est, $\tilde{f}^{-1}(V)$ est elle aussi une partie compacte spectralement convexe de $\mathbb{A}^n_{\mathcal{B}}$ et $\mathcal{B}(\tilde{f}^{-1}(V))$ est naturellement isomorphe à $(\widehat{\mathcal{B}(V)\widehat{\otimes}_{\mathcal{A}}\hat{\mathcal{B}}})$ où $\widehat{\otimes}$ est le produit tensoriel séparé complété.

Démonstration de la proposition. Puisque $\mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}$ est égale à l'union croissante des $\overline{D}_{\mathcal{M}(\mathcal{A})}(\mathbf{r})$ avec $\mathbf{r}$ un n-uplet de réels positifs, pour montrer que $\tilde{f}$ est propre, il suffit de montrer que pour tout $\mathbf{r} \in (\mathbb{R}^+)^n$, $\tilde{f}^{-1}(\overline{D}_{\mathcal{M}(\mathcal{A})}(\mathbf{r}))$ est un ensemble compact. Mais cet ensemble n'est autre que $\overline{D}_{\mathcal{M}(\mathcal{B})}(\mathbf{r})$ qui est un ensemble compact.

Montrons maintenant la deuxième partie de la proposition. Soit V une partie compacte spectralement convexe de $\mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}$.

Le morphisme $\mathcal{A}[T_1,\ldots,T_n] \to \mathcal{B}(\tilde{f}^{-1}(V))$ s'étend en un morphisme borné d'algèbres de Banach $\mathcal{B}(V) \to \mathcal{B}(\tilde{f}^{-1}(V))$. Ainsi, le morphisme $\mathcal{M}(\mathcal{B}(\tilde{f}^{-1}(V)) \to \mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}$ correspondant se factorise par V. Cela implique que le morphisme $\mathcal{M}(\mathcal{B}(\tilde{f}^{-1}(V)) \to \mathbb{A}^n_{\mathcal{B}}$ se factorise par $\tilde{f}^{-1}(V)$ et donc grâce à la proposition 1.1 que $\tilde{f}^{-1}(V)$ est spectralement convexe.

Passons maintenant à la démonstration du troisième point de la proposition.

Remarquons que le morphisme d'algèbres $\mathcal{A}[T_1,\ldots,T_n] \to \mathcal{B}(V)$ induit en passant au tensorisé par $\mathcal{B}$ un morphisme $\mathcal{B}[T_1,\ldots,T_n] \to \mathcal{B}(V) \otimes_{\mathcal{A}} \widehat{\mathcal{B}}$. En passant à droite à l'algèbre uniforme associée, au complété du produit tensoriel on obtient un morphisme de $\mathcal{B}$-algèbres $\mathcal{B}[T_1,\ldots,T_n] \to (\widehat{\mathcal{B}(V)\widehat{\otimes}_{\mathcal{A}}}\widehat{\mathcal{B}})$. Nous allons dans la suite considérer le morphisme d'espaces localement annelés $\mathcal{M}((\widehat{\mathcal{B}(V)\widehat{\otimes}_{\mathcal{A}}}\widehat{\mathcal{B}})) \to \mathbb{A}^n_{\mathcal{B}}$ correspondant à ce morphisme d'algèbres.

Grâce à la proposition 1.5, il suffit de montrer les deux faits suivants :

1. $\mathcal{M}((\widehat{\mathcal{B}(V)\widehat{\otimes}_{\mathcal{A}}}\widehat{\mathcal{B}})) \to \mathbb{A}^n_{\mathcal{B}}$ se factorise par $\tilde{f}^{-1}(V)$;
2. pour tout $\mathcal{B}$-algèbre de Banach $\mathcal{C}$ uniforme et tout morphisme $\mathcal{B}[T_1,\ldots,T_n] \to \mathcal{C}$ tel que $\mathcal{M}(\mathcal{C}) \to \mathbb{A}^n_{\mathcal{B}}$ se factorise par $\tilde{f}^{-1}(V)$, le morphisme $\mathcal{B}[T_1,\ldots,T_n] \to \mathcal{C}$ se factorise de manière unique par $(\widehat{\mathcal{B}(V)\widehat{\otimes}_{\mathcal{A}}}\widehat{\mathcal{B}})$.

Montrons d'abord le premier point.

Pour montrer ce fait il suffit de montrer que le morphisme $\mathcal{M}((\widehat{\mathcal{B}(V)\widehat{\otimes}_{\mathcal{A}}}\widehat{\mathcal{B}})) \to \mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}$ se factorise par V. Or le morphisme d'algèbres $\mathcal{A}[T_1,\ldots,T_n] \to (\widehat{\mathcal{B}(V)\widehat{\otimes}_{\mathcal{A}}}\widehat{\mathcal{B}})$ se factorise par $\mathcal{A}[T_1,\ldots,T_n] \to \mathcal{B}(V)$ ce qui implique ce que l'on souhaite puisque V est spectralement convexe.

Intéressons nous maintenant au deuxième point.

Soient $\mathcal{C}$ une $\mathcal{B}$-algèbre de Banach uniforme et $\mathcal{B}[T_1,\ldots,T_n] \to \mathcal{C}$ un morphisme de $\mathcal{B}$-algèbres tel que $\mathcal{M}(\mathcal{C}) \to \mathbb{A}^n_{\mathcal{B}}$ se factorise par $\tilde{f}^{-1}(V)$. En premier lieu puisque $\mathcal{C}$ est uniforme $\mathcal{B}[T_1,\ldots,T_n] \to \mathcal{C}$ se factorise de manière unique par $\mathcal{B}[T_1,\ldots,T_n] \to \hat{\mathcal{B}}[T_1,\ldots,T_n]$. L'application $\mathcal{M}(\mathcal{C}) \to \mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}$ se factorise par V, ainsi il existe une unique factorisation de $\mathcal{A}[T_1,\ldots,T_n] \to \mathcal{C}$ par $\mathcal{B}(V)$. En tensorisant par $\hat{\mathcal{B}}$ au-dessus de $\mathcal{A}$, on obtient une unique factorisation de $\hat{\mathcal{B}}[T_1,\ldots,T_n] \to \mathcal{C}$ par $\hat{\mathcal{B}}[T_1,\ldots,T_n] \to \mathcal{B}(V) \otimes_{\mathcal{A}} \widehat{\mathcal{B}}$. Puisque l'algèbre $\mathcal{C}$ est complète et uniforme ce morphisme ce factorise de manière unique par le séparé complété pour la norme uniforme du produit tensoriel $(\widehat{\mathcal{B}(V)\widehat{\otimes}_{\mathcal{A}}}\widehat{\mathcal{B}})$.

Toutes les factorisations évoquées étant uniques, nous obtenons le résultat souhaité. $\square$

Corollaire 4.16. *Soient $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un morphisme d'algèbres de Banach et X un espace $\mathcal{A}$-analytique. Le morphisme $X\widehat{\otimes}_{\mathcal{A}}\mathcal{B} \to X$ est un morphisme topologiquement propre.*

Démonstration du corollaire. La propreté étant une notion locale en l'espace d'arrivée, nous pouvons supposer que X est un sous-espace analytique d'un ouvert U de l'espace affine $\mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}$.

Or la proposition 4.15 assure que le morphisme $\tilde{f} : \mathbb{A}^n_{\mathcal{B}} \to \mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}$ est un morphisme topologiquement propre. Mais la proposition 4.12 assure que $X\widehat{\otimes}_{\mathcal{A}}\mathcal{B}$ est isomorphe à $\tilde{f}^{-1}(X)$ et que le morphisme $X\widehat{\otimes}_{\mathcal{A}}\mathcal{B} \to X$ n'est autre que la restriction $\tilde{f} : \tilde{f}^{-1}(X) \to X$. Ainsi $X\widehat{\otimes}_{\mathcal{A}}\mathcal{B} \to X$ est un morphisme topologiquement propre. $\square$

Soit $x \in X$. Ce point induit un $\mathscr{H}(x)$-point dans l'espace $\mathscr{H}(x)$-analytique $X\widehat{\otimes}_{\mathcal{A}}\mathscr{H}(x)$. Pour voir cela, nous pouvons raisonner localement. Nous pouvons supposer que X est un sous-espace analytique d'un ouvert U de $\mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}$. L'espace $\mathscr{H}(x)$-analytique $X\widehat{\otimes}_{\mathcal{A}}\mathscr{H}(x)$ est alors un sous-espace analytique de $U\widehat{\otimes}_{\mathcal{A}}\mathscr{H}(x)$qui est lui même un ouvert de $\mathbb{A}^n_{\mathscr{H}(x)}$. La semi-norme x induit une semi-norme sur $\mathscr{H}(x)[T_1, \ldots, T_n]$. Cette semi-norme n'est autre que celle correspondant à l'idéal $(T_1 - T_1(x), \ldots, T_n - T_n(x))$.

La proposition 4.7 va surtout nous être utile dans le cas où $\mathcal{B}$ est $\mathscr{H}(x)$ avec x un point de X. En effet, la proposition suivante nous permet de raisonner au-dessus d'un corps dans certain cas.

Proposition 4.17. *Soient $\varphi : X \to Y$ un morphisme d'espaces $\mathcal{A}$-analytiques et y un point de Y. Le morphisme naturel d'espaces $\mathcal{A}$-annelés $X \times_Y \{y\} \to X$, où $X \times_Y \{y\}$ désigne l'espace $\mathscr{H}(y)$-analytique $(X\widehat{\otimes}_{\mathcal{A}}\mathscr{H}(y)) \times_{Y\widehat{\otimes}_{\mathcal{A}}\mathscr{H}(y)} \{y\}$, induit un homéomorphisme entre $X \times_Y \{y\}$ et $\varphi^{-1}(\{y\})$.*

Démonstration de la proposition. Remarquons dans un premier temps que si $\psi : Y \to Z$ est une immersion d'espaces $\mathcal{A}$-analytiques et si l'on a deux morphismes d'espaces $\mathcal{A}$-analytiques $\varphi : X \to Y$ et $\varphi' : T \to Y$, le morphisme naturel $X \times_Y T \to X \times_Z T$ est un isomorphisme (cela provient du fait qu'une immersion est un monomorphisme de la catégorie $An_{\mathcal{A}}$).

La propriété étant locale en Y, nous pouvons remplacer Y par un espace affine $\mathbb{A}^{n'}_{\mathcal{A}}$ sans perte de généralité.

Pour montrer que $f : X \times_Y \{y\} \to X$ induit un homéomorphisme entre $X \times_Y \{y\}$ et $\varphi^{-1}(\{y\})$, il suffit de montrer que pour tout point $x \in X$, il existe un voisinage ouvert U de x dans X tel que l'application $f : f^{-1}(U) \simeq U \times_Y \{y\} \to U$ (l'isomorphisme de gauche est justifié par la proposition 4.12) induise un homéomorphisme entre $\varphi^{-1}(\{y\}) \cap f^{-1}(U)$ et $\varphi^{-1}(\{y\}) \cap U$.

Soit $x_0 \in X$. Par ce qui précède, quitte à remplacer X par un voisinage de x_0, on peut supposer qu'il existe $\tilde{U} := \bigcap_{i=1}^k \{x \in \mathbb{A}^n_{\mathcal{A}} | r_i \prec |P_i(x)| < s_i\}$ tel que X soit un sous-espace analytique de U défini par le système d'équations $(Q_m)_{m \in [\![1,l]\!]}$. De plus, nous pouvons supposer que nous avons choisi cet ouvert de telle sorte que le morphisme φ s'étende en un morphisme $\tilde{\varphi} : \tilde{U} \to \mathbb{A}^{n'}_{\mathcal{A}}$. Après extension des scalaires on obtient le morphisme $\varphi\widehat{\otimes}_{\mathcal{A}}\mathscr{H}(y) : X\widehat{\otimes}_{\mathcal{A}}\mathscr{H}(y) \to \mathbb{A}^{n'}_{\mathscr{H}(y)}$ où $X\widehat{\otimes}_{\mathcal{A}}\mathscr{H}(y)$ désigne l'espace $\mathscr{H}(y)$-analytique $\bigcap_{i \in [\![1,k]\!],\, m \in [\![1,l]\!]} \{x \in \mathbb{A}^n_{\mathscr{H}(y)} | r_i \prec |P_i(x)| < s_i,\, Q_m(x) = 0\}$. Comme nous l'avons remarqué plus tôt, la semi-norme y de $\mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}$ s'identifie à la semi-norme donnée par l'idéal maximal de $\mathscr{H}(y)[T_1, \ldots, T_{n'}]$ engendré par $T_1 - T_1(y), \ldots, T_{n'} - T_{n'}(y)$ où les $T_i(y)$ sont les valeurs de la fonction T_i en y. Ainsi, le morphisme d'espaces analytiques $\{y\} \to \mathbb{A}^{n'}_{\mathscr{H}(y)}$ est une immersion fermée. La proposition 4.12 assure que l'ensemble des antécédents de y par $\varphi\widehat{\otimes}_{\mathcal{A}}\mathscr{H}(y)$ s'identifie à $(X\widehat{\otimes}_{\mathcal{A}}\mathscr{H}(y)) \times_{Y\widehat{\otimes}_{\mathcal{A}}\mathscr{H}(y)} \{y\}$. Il nous faut donc montrer qu'il y a homéomorphisme entre l'ensemble des antécédents de y vu comme un élément de $\mathbb{A}^{n'}_{\mathscr{H}(y)}$ par $\varphi\widehat{\otimes}_{\mathcal{A}}\mathscr{H}(y)$ et l'ensemble des antécédents de y vu comme un élément de $\mathbb{A}^{n'}_{\mathcal{A}}$ par φ

Soit V un voisinage spectralement convexe de x_0 dans U sur lequel les Q_i et les sections correspondant au morphisme $\tilde{\varphi}$ sont $\mathcal{B}$-définis. En vertu de la proposition 4.15 $f^{-1}(V)$ est un voisinage spectralement convexe $f^{-1}(\{x_0\})$. L'ensemble des $x \in V$ qui ont pour image y par φ correspond à l'ensemble des semi-normes de $\mathcal{B}(V)$ qui envoient les Q_i sur 0 et qui une fois composées avec le morphisme $\mathcal{A}[T_1, \ldots, T_{n'}] \to \mathcal{B}(V)$ donnent la semi-norme y. Soit x une telle semi-norme. Par propriété universelle du produit tensoriel séparé complété, le morphisme $\mathcal{B}(V) \to \mathscr{H}(x)$ se factorise de manière unique par $\mathcal{B}(V) \to \mathcal{B}(V)\widehat{\otimes}_{\mathcal{A}}\mathscr{H}(y)$. Or la proposition 4.15 assure que $\widehat{\mathcal{B}(V)\otimes_{\mathcal{A}}\mathscr{H}}(y)$ est isomorphe à $\mathcal{B}(f^{-1}(V))$. Ainsi on sait que tout point de V dont l'image par φ est y vu comme un point de $\mathbb{A}^{n'}_{\mathcal{A}}$ se relève de manière unique en un point de $f^{-1}(V)$ dont l'image par $\varphi\widehat{\otimes}_{\mathcal{A}}\mathscr{H}(y)$ est y vu comme un point de $\mathbb{A}^{n'}_{\mathscr{H}(y)}$. □

Remarquons que cette proposition ne contient pas la remarque 1.16. En effet, pour la proposition nous avons supposé que $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont des anneaux de base géométrique ce qui n'est en général pas le cas pour tout anneau de Banach de la forme $\mathcal{B}(V)$ où V est un domaine spectralement convexe d'un espace affine $\mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}$.

Nous allons à présent donner la description du « produit » d'ensembles spectralement convexes (les guillemets sont là pour rappeler que les ensembles compacts spectralement convexes ne sont pas des espaces analytiques et donc en particulier nous n'avons pas défini leur produit).

Proposition 4.18. *Soient n, m deux entiers positifs, $U \subset \mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}$, $V \subset \mathbb{A}^m_{\mathcal{A}}$ des sous-ensembles compacts spectralement convexes.*

On note $p_1 : \mathbb{A}^n_{\mathcal{A}} \times \mathbb{A}^m_{\mathcal{A}} \to \mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}$ et $p_2 : \mathbb{A}^n_{\mathcal{A}} \times \mathbb{A}^m_{\mathcal{A}} \to \mathbb{A}^m_{\mathcal{A}}$ les projections naturelles.

Posons $U \times V := \{t \in \mathbb{A}^{n+m}_{\mathcal{A}} | \ p_1(t) \in U, \ p_2(t) \in V\}$.

Cet ensemble est une partie compacte spectralement convexe de $\mathbb{A}^{n+m}_{\mathcal{A}}$. de plus, le morphisme $(\widehat{\mathcal{B}(V)\otimes_{\mathcal{A}}\mathcal{B}}(U)) \to \mathcal{B}(U \times V)$ est un isomorphisme d'algèbre de Banach.

Démonstration de la proposition. Pour montrer que $U \times V$ est une partie compacte de $\mathbb{A}^{n+m}_{\mathcal{A}}$, nous allons utiliser les propositions 4.15 et 4.17. En effet, soit $x \in U$. La proposition 4.15 assure que l'ensemble $p_1^{-1}(\{x\}) = V\widehat{\otimes}_{\mathcal{A}}\mathscr{H}(x)$ est un ensemble compact spectralement convexe.

Soit $\mathcal{W}$ un recouvrement ouvert de $U \times V$. Pour tout $x \in U$ la restriction de ce recouvrement à $p_1^{-1}(\{x\})$ admet un sous-recouvrement fini. Ainsi puisque p_1 est ouvert et puisque U est compact on déduit que $\mathcal{W}$ admet un sous-recouvrement fini.

Montrons maintenant que $U \times V$ est spectralement convexe.

Le morphisme $\mathcal{A}[T_1, \ldots, T_n] \to \mathcal{B}(U \times V)$ s'étend en un morphisme borné d'algèbres de Banach $\mathcal{B}(U) \to \mathcal{B}(U \times V)$. En effet, soient $x \in U$ et $P \in \mathcal{A}[T_1, \ldots, T_n]$. Puisque nous avons l'égalité $p_1(U \times V) = U$, nous savons que l'inégalité $|P(x)| \leq \|p_1^{\#}(P)\|_{U\times V}$ est vérifiée et donc nous obtenons l'inégalité suivante

$$\|P\|_U \leq \|p_1^{\#}(P)\|_{U\times V}.$$

Ainsi, le morphisme $\mathcal{M}(\mathcal{B}(U \times V)) \to \mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}$ se factorise par U. De la même manière nous montrons que le morphisme $\mathcal{M}(\mathcal{B}(U \times V)) \to \mathbb{A}^m_{\mathcal{A}}$ se factorise par V. Ainsi le morphisme $\mathcal{M}(\mathcal{B}(U \times V)) \to \mathbb{A}^{n+m}_{\mathcal{A}}$ se factorise par $U \times V$ et donc grâce à la proposition

1.16 $U \times V$ est spectralement convexe.

Nous avons donc un morphisme $\mathcal{B}(U) \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{B}(V) \to \mathcal{B}(U \times V)$. Puisque ce morphisme est borné nous pouvons passer au séparé complété $\mathcal{B}(U)\widehat{\otimes}_{\mathcal{A}}\mathcal{B}(V) \to \mathcal{B}(U \times V)$. L'algèbre de droite étant uniforme ce morphisme se factorise de manière unique en un morphisme entre algèbres de Banach uniformes $(\widehat{\mathcal{B}(U)\widehat{\otimes}_{\mathcal{A}}\mathcal{B}(V)}) \to \mathcal{B}(U \times V)$.

Montrons que ce morphisme est un isomorphisme.

Grâce à la proposition 1.5, il suffit de montrer les deux faits suivants :

1. $\mathcal{M}((\widehat{\mathcal{B}(U)\widehat{\otimes}_{\mathcal{A}}\mathcal{B}(V)})) \to \mathbb{A}_{\mathcal{A}}^{n+m}$ se factorise par $U \times V$;
2. pour tout $\mathcal{A}$-algèbre de Banach $\mathcal{C}$ uniforme et tout morphisme de $\mathcal{A}$-algèbres
$$\mathcal{A}[T_1, \ldots, T_{n+m}] \to \mathcal{C}$$
tel que $\mathcal{M}(\mathcal{C}) \to \mathbb{A}_{\mathcal{A}}^{n+m}$ se factorise par $U \times V$, le morphisme $\mathcal{A}[T_1, \ldots, T_{n+m}] \to \mathcal{C}$ se factorise de manière unique par $(\widehat{\mathcal{B}(U)\widehat{\otimes}_{\mathcal{A}}\mathcal{B}(V)})$.

Montrons d'abord le premier point.

Pour montrer ce fait, il suffit de montrer que le morphisme $\mathcal{M}((\widehat{\mathcal{B}(U)\widehat{\otimes}_{\mathcal{A}}\mathcal{B}(V)})) \to \mathbb{A}_{\mathcal{A}}^{n}$ se factorise par U et $\mathcal{M}((\widehat{\mathcal{B}(U)\widehat{\otimes}_{\mathcal{A}}\mathcal{B}(V)})) \to \mathbb{A}_{\mathcal{A}}^{m}$ se factorise par V. Or le morphisme d'algèbre $\mathcal{A}[T_1, \ldots, T_n] \to (\widehat{\mathcal{B}(U)\widehat{\otimes}_{\mathcal{A}}\mathcal{B}(V)})$ se factorise par $\mathcal{A}[T_1, \ldots, T_n] \to \mathcal{B}(U)$ et de même pour $\mathcal{B}(V)$ se qui implique ce que l'on souhaite puisque U et V sont spectralement convexes.

Intéressons nous maintenant au deuxième point.

Soient $\mathcal{C}$ une $\mathcal{A}$-algèbre de Banach uniforme et $\mathcal{A}[T_1, \ldots, T_{n+m}] \to \mathcal{C}$ un morphisme de $\mathcal{A}$-algèbres tel que $\mathcal{M}(\mathcal{C}) \to \mathbb{A}_{\mathcal{A}}^{n+m}$ se factorise par $U \times V$. L'application obtenue après composition avec p_1, $\mathcal{M}(\mathcal{C}) \to \mathbb{A}_{\mathcal{A}}^{n}$ se factorise par U, ainsi il existe une unique factorisation de $\mathcal{A}[T_1, \ldots, T_n] \to \mathcal{C}$ par $\mathcal{A}[T_1, \ldots, T_n] \to \mathcal{B}(U)$. Nous pouvons montrer de la même amnière que le morphisme $\mathcal{A}[T_{n+1}, \ldots, T_{n+m}] \to \mathcal{C}$ se factorise de manière unique par $\mathcal{A}[T_{n+1}, \ldots, T_{n+m}] \to \mathcal{B}(V)$. Ainsi le morphisme $\mathcal{A}[T_1, \ldots, T_{n+m}] \to \mathcal{C}$ se factorise (toujours de manière unique) par $\mathcal{A}[T_1, \ldots, T_{n+m}] \to \mathcal{B}(U) \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{B}(V)$. Puisque $\mathcal{C}$ est une algèbre de Banach uniforme le morphisme $\mathcal{B}(U) \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{B}(V) \to \mathcal{C}$ se factorise aussi de manière unique par $(\widehat{\mathcal{B}(U)\widehat{\otimes}_{\mathcal{A}}\mathcal{B}(V)})$. Toute les factorisations étant uniques, on obtient le résultat souhaité. $\square$

Finissons en donnant une propriété de l'espace topologique sous-jacent au produit fibré d'espaces analytiques.

Proposition 4.19. *Soient $\varphi : X \to Y$, et $\psi : Z \to Y$ deux morphismes d'espaces analytiques. On note $|X|$, $|Y|$ et $|Z|$ les espaces topologiques sous-jacents à X, Y et Z.*

L'application continue $|X \times_Y Z| \to |X| \times_{|Y|} |Z|$ est une application continue, propre et surjective.

Démonstration de la proposition. Commençons par remarquer que l'énoncé est local et donc que l'on peut supposer que X, Y et Z sont des sous-espaces analytiques d'ouverts U, V et W d'espaces affines. Qui plus est, puisque $|U|$, $|V|$, $|X|$,$|U|$ et $|Z|$ sont des espaces séparés le corollaire 4.9 nous savons que le morphisme $|X \times_Y Z| \to |U \times W|$ est une immersion fermée d'espaces topologiques (c'est, en particulier, une application propre). De même nous savons que $|X| \times_{|Y|} |Z| \to |U| \times |W|$ est une immersion fermée d'espaces topologiques. Nous avons donc un diagramme commutatif de la forme suivante :

$$\begin{tikzcd} {|X \times_Y Z|} \arrow[r] \arrow[d] & {|U \times W|} \arrow[d] \\ {|X| \times_{|Y|} |Z|} \arrow[r] & {|U| \times |W|} \end{tikzcd}$$

où les deux applications horizontales sont des immersions fermées d'espaces topologiques.

Il suffit donc de montrer l'énoncé dans le cas où $Z = \mathcal{M}(\mathcal{A})$ et X et Y sont des ouverts d'espaces affines.

Mais dans ce cas il suffit de montrer que pour tout couple de parties spectralement convexes U' et W' incluses dans U et W, la préimage de l'ensemble $|U'| \times |W'|$ est un ensemble compact, ce qui découle de la proposition 4.18. $\square$

Chapitre 5

Quelques propriétés des morphismes finis et résultats de connexité sur les espaces affines

Dans ce chapitre nous allons montrer des résultats sur les morphismes d'espaces analytiques et sur les faisceaux cohérents dans l'optique de montrer la connexité locale des espaces affines sur un anneau d'entiers de corps de nombres. Dans un premier temps, nous montrerons que l'image directe d'un faisceau cohérent par un morphisme fini d'espaces analytiques est un faisceau cohérent. Nous nous servirons de ces résultats pour montrer quelques propriétés sur les morphismes finis eux-même. Ensuite, en utilisant tous ces résultats et un théorème du type « Nullstellensatz de Rückert » nous montrerons que les morphismes finis et plats sont ouverts. Enfin, nous utiliserons ces résultats pour montrer la connexité locale par arcs des espaces affines sur un anneau d'entiers de corps de nombres à l'aide d'arguments de topologie générale.

Durant toute cette section (sauf dans sa dernière partie où nous supposerons que $\mathcal{A}$ est un anneau d'entiers de corps de nombres ou un corps) nous supposerons que $\mathcal{A}$ est un anneau de base géométrique.

Par défaut, les espaces et morphismes sont $\mathcal{A}$-analytiques. Lorsqu'ils seront analytiques au-dessus de $\mathcal{A}$, nous le préciserons.

5.1 Quelques résultats préliminaires

Le but de cette section est de donner une démonstration de résultats classiques mais dont la preuve est instructive ou de résultats déjà connus dans la théorie des espaces analytiques mais dont la preuve est lacunaire.

Dans cette section tous les espaces topologiques seront localement compacts.

Définition 5.1. Soit $f : X \to Y$ une application continue entre espaces topologiques séparés localement compacts. On dit que f est finie si elle est fermée (*i.e.* l'image de tout fermé est fermé) et si pour tout point $y \in Y$, $f^{-1}(\{y\})$ est un ensemble fini.

Remarquons que la composée de deux applications finies est une application finie. De plus, toute application continue et finie est en particulier propre (*i.e.* la préimage de tout compact est compact). C'est une conséquence de la proposition classique suivante (voir le chapitre 1 de la partie 10 de [Bou98]).

Proposition 5.2. *Soit $f : X \to Y$ une application continue entre espaces topologiques séparés localement compacts. Supposons de plus que pour tout $y \in Y$, $f^{-1}(\{y\})$ est un ensemble compact et que f est une application fermée. L'application f est alors propre.*

Remarque 5.3. Nous pouvons alors remarquer que si la composée de deux applications continues $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$ est une application finie, l'application f est, elle aussi, finie. Le fait que la fibre de chaque point soit un ensemble fini est clair. Maintenant pour montrer que l'application est finie, il suffit de montrer qu'elle est propre. Soit K un compact de Y, $f^{-1}(K)$ est fermé et est inclus dans $f^{-1}(g^{-1}(g(K)))$ qui est compact d'après la proposition précédente. Donc $f^{-1}(K)$ est compact.

Lemme 5.4. *Soit $f : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ un morphisme d'espaces localement annelés fini (i.e. l'application continue sous-jacente est finie) avec X et Y séparés localement compacts. Le foncteur f_* de la catégorie $\mathcal{O}_X$-modules dans la catégorie des $\mathcal{O}_Y$-modules est exact.*

Démonstration du lemme. Pour montrer que ce foncteur est exact, il suffit de montrer que pour tout point $y \in Y$ et toute suite exacte

$$0 \to L \to M \to N \to 0$$

de $\mathcal{O}_X$-modules, la suite

$$0 \to f_*(L)_y \to f_*(M)_y \to f_*(N)_y \to 0$$

de $\mathcal{O}_{Y,y}$-modules est exacte. On note $x_1, \ldots, x_n$ les antécédents de y par f.

Commençons par remarquer que pour tout $\mathcal{O}_X$-module O, $f_*(O)_y \simeq \prod_{i=1}^n O_{x_i}$. En effet, par finitude il existe un voisinage V_0 de y dans Y tel que $f^{-1}(V_0) = \coprod_{i=1}^n U_{i,0}$ où les $U_{i,0}$ sont des voisinages deux à deux disjoints de x_i. De plus, toujours par finitude de f, l'ensemble des voisinages $f^{-1}(V) \cap U_{i,0}$ où V parcours les voisinages de y dans Y forme une base de voisinages de x_i dans X. Ainsi nous avons la suite d'isomorphisme :

$$\begin{array}{rcl} f_*(O)_y & := & \mathrm{colim}_{V \ni y} O(f^{-1}(V)) \\ & \simeq & \mathrm{colim}_{V \ni y} \prod_{i=1}^n O(f^{-1}(V) \cap U_{i,0}) \\ & \simeq & \prod_{i=1}^n \mathrm{colim}_{U_i \ni x_i} O(U_i) \\ & \simeq & \prod_{i=1}^n O_{x_i}. \end{array}$$

Ainsi nous sommes ramené à montrer que la suite

$$0 \to \prod_{x \in f^{-1}(\{y\})} L_x \to \prod_{x \in f^{-1}(\{y\})} M_x \to \prod_{x \in f^{-1}(\{y\})} N_x \to 0$$

est exacte. Or par hypothèse pour tout $x \in f^{-1}(\{y\})$ la suite

$$0 \to L_x \to M_x \to N_x \to 0$$

est exacte. Ainsi la première suite est exacte comme produit fini de suites exactes. $\square$

Nous aurons besoin dans la suite du Théorème 8.7 de [Poi13] sans la restriction sur le polynôme G. Il est énoncé dans le cadre de la géométrie analytique complexe sous le nom « Théorème de division de Weierstraß généralisé » dans [GR84].

Théorème 5.5. *Soient b un point de $B := \mathcal{M}(\mathcal{A})$, x un point de $\mathbb{A}^n_{\mathscr{H}(b)}$, V un voisinage compact spectralement convexe de x dans $\mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}$ et $G \in \mathcal{B}(V)[T]$ un polynôme unitaire de degré d. Si son corps résiduel $\mathscr{H}(x)$ est de caractéristique non nulle, nous supposons, de plus, que le point x est ultramétrique typique. Notons $\{y_1, \ldots, y_k\}$ l'ensemble des point de $\mathbb{A}^1_{\mathcal{B}(V)}$ qui sont solutions de G au-dessus de x. Soit $(f_1, \ldots, f_k) \in \prod_{i=1}^k \mathcal{O}_{\mathbb{A}^1_{\mathcal{B}(V)}, y_i}$.*

Alors, il existe un unique élément $(r, q_1, \ldots, q_k)$ de $\mathcal{O}_{V,x}[T] \times \prod_{i=1}^k \mathcal{O}_{\mathbb{A}^1_{\mathcal{B}(V)}, y_i}$ vérifiant les propriétés suivantes :

1. *pour tout $i \in [\![1, k]\!]$, nous avons $f_i = q_i G + r$ dans $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^1_{\mathcal{B}(V)}, y_i}$;*
2. *le polynôme r est de degré strictement inférieur à d.*

La preuve est tout à fait analogue à la démonstration du Théorème 5.5.3 de [Poi10], nous la redonnons cependant pour rendre la lecture plus confortable.

Démonstration du théorème. Nous pouvons écrire $G(x) \in \mathscr{H}(x)[T]$ sous la forme d'un produit

$$G(x) = a_d(x) \prod_{i=1}^k p_i^{n_i},$$

où les p_i sont des polynômes irréductibles et unitaires à coefficients dans $\mathscr{H}(x)$ et les n_i sont des éléments de $\mathbb{N}^*$. On note d_i le degré du polynôme p_i. Quitte à réordonner les p_i, on peut supposer que y_i est le point de $\mathbb{A}^1_{\mathscr{H}(x)}$ défini par l'équation $p_i = 0$.

D'après le Corollaire 5.4 de [Poi13], les décompositions en produits de facteurs irréductibles du polynôme G dans $\kappa(x)[T]$ et dans $\mathscr{H}(x)[T]$ sont identiques. Ainsi pour tout i le polynôme p_i est à coefficient dans $\kappa(x)$. L'anneau $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}, x}$ étant hensélien (voir le Théorème 5.1 de [Poi13]), il existe des polynômes $G_1, \ldots, G_k$ unitaires à coefficients dans $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}, x}$ vérifiant les propriétés suivantes :

1. $G = a_d \prod_{i=1}^k G_i$ dans $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}, x}[T]$;
2. quel que soit i, nous avons $G_i(x) = p_i^{n_i}$.

Passons maintenant à la démonstration du théorème à proprement parler.

Soit $(f_1, \ldots, f_k) \in \prod_{i=1}^k \mathcal{O}_{\mathbb{A}^1_{\mathcal{B}(V)}, y_i}$ un k-uplet de germes. Il suffit de montrer l'énoncé dans le cas où il existe $i \in [\![1, k]\!]$ tel que pour tout $j \neq i$, $f_j = 0$, le cas général en découle par addition. On pose $e_i := a_d \prod_{j \neq i} G_j$. La fonction e_i est inversible au voisinage du point y_i. Le théorème de Weierstraß assure qu'il existe un élément q_i de $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^1_{\mathcal{B}(V)}, y_i}$ et un polynôme r' à coefficients dans $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}, x}$ de degré strictement inférieur à $n_i d_i$ tels que

$$f_i e_i^{-1} = q_i G_i + r' \text{ dans } \mathcal{O}_{\mathbb{A}^1_{\mathcal{B}(V)}, y_i}.$$

En multipliant l'égalité par e_i, nous obtenons $f_i = q_i G + r$ dans $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^1_{\mathcal{B}(V)}, y_i}$, où $r = r' e_i$ est un polynôme de degré strictement inférieur à d.

Soit $j \neq i$. La fonction G_i est inversible au voisinage du point y_j. Posons $q_j := -r' G_i^{-1}$ dans $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^1_{\mathcal{B}(V)}, y_j}$. Nous avons alors $0 = q_j G + r$ dans $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^1_{\mathcal{B}}(V), y_j}$.

Pour finir, démontrons l'unicité de l'écriture obtenue. Soit $(r, q_1, \dots, q_k)$ un élément de $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}, x}[T] \times \prod_{i=1}^k \mathcal{O}_{\mathbb{A}^1_{\mathcal{B}(V)}, y_i}$ vérifiant les propriétés suivantes :

— le polynôme r est de degré strictement inférieur à d ;

— quelque soit i, nous avons $0 = q_i G + r$ dans $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^1_{\mathcal{B}(V)}, y_i}$.

Pour montrer que l'écriture est unique, il faut montrer que r nul et que, quel que soit i, la section q_i est nulle. Avec les mêmes notations que précédement, nous obtenons l'égalité $-r = (q_i e_i) G_i$ dans $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^1_{\mathcal{B}(V)}, y_i}$. L'unicité de la division de Weierstraß assure que puisque r et G_i appartiennent à $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}, x}[T]$ et puisque G_i est unitaire, la division de Weierstraß n'est autre que la division euclidienne et donc en particulier le germe $q_i e_i$ appartient lui aussi à $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}, x}[T]$. Ainsi pour tout i, G_i divise r dans $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}, x}[T]$. Or les polynômes G_i sont premiers deux à deux dans $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}, x}[T]$. Leur produit $a_d^{-1} G$ divise r. Pour des raisons de degré, cela implique que r est nul. Enfin par unicité de la division euclidienne cela implique que les q_i sont également nuls. □

Finissons par la proposition suivante dont la démonstration est tout à fait analogue à celle du Lemme 9.14 de [Poi13].

Proposition 5.6. *Soit x un point de $\mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}$ au-dessus d'un point $b \in \mathcal{M}(A) =: B$ tel que $\mathcal{O}_{B,b}$ soit un corps fort.*

Soit $f \in \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}, x}$ un germe non nul de fonction en x. La restriction de f à $\mathbb{A}^n_{\mathscr{H}(b)}$ est non nulle.

Démonstration de la proposition. Quitte à échanger les coordonnées, on peut supposer que la projection de x sur les k premières variables x_k est purement localement transcendant au-dessus de b et x est rigide épais au-dessus de x_k. Nous allons démontrer l'énoncé par récurence sur la dimension $n - k$.

Si $n - k = 0$ cela découle du fait que dans ce cas $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}, x} = \mathcal{O}_{\mathbb{A}^k_{\mathcal{A}}, x_k}$ soit un corps. En effet, si f est non nul dans $\mathcal{O}_{B,b}$, $f(b)$ est non nul.

Supposons que nous ayons démontré l'énoncé pour $n - k = l \in \mathbb{N}$. Montrons l'énoncé pour la dimension égale à $n - k = l + 1$. On note x_{n-1} la projection de x sur les $n-1$ premières variables. Par hypothèse x est rigide épais au-dessus de x_{n-1}. Soit $P \in \kappa(x_{n-1})[T_n]$ le polynôme minimal de x au-dessus de x_{n-1}. On note $\tilde{P} \in \mathcal{O}_{\mathbb{A}^{n-1}_{\mathcal{A}}, x_{n-1}}[T_n]$ un relèvement unitaire de ce polynôme. D'après le Théorème 8.8 de [Poi13] il y a un isomorphisme naturel $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}, 0_{x_{n-1},n}}[S]/(\tilde{P}(S) - T_n) \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}, x}$ où $0_{x_{n-1},n}$ est le point rigide épais au-dessus de x_{n-1} correspondant à l'idéal (T_n). Il suffit donc de démontrer le résultat pour $0_{x_{n-1},n}$. Or tout élément de $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}, 0_{x_{n-1},n}}$ possède un développement en série entière à coefficients dans $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^{n-1}_{\mathcal{A}}, x_{n-1}}$ (voir le Corollaire 2.6 de [Poi13]). On conclut alors par hypothèse de récurrence. □

5.2 Stabilité des faisceaux cohérents par les morphismes finis

Le but de cette section est de montrer que si f est un morphisme fini d'espaces analytiques le foncteur f_* préserve les faisceaux cohérents. Nous en déduirons dans la section suivante un certain nombre de conséquences qui nous serons utiles par la suite.

Avant de montrer le résultat général, commençons par montrer un cas particulier.

Lemme 5.7. *Soient n un entier et W un ouvert de $\mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}$. Soit $\omega \in \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}}(W)[T]$ un polynôme unitaire de degré d. On munit $\{\omega = 0\} := \{x \in p_{n+1,n}^{-1}(W) | \omega(x) = 0\} \subset \mathbb{A}^{n+1}_{\mathcal{A}}$ de son faisceau structural $\mathcal{O}_{p_{n+1,n}^{-1}(W)}/(\omega)$. Nous avons alors les trois propriétés suivantes :*

1. *le morphisme $p_{n+1,n} : \{\omega = 0\} \to W$ est un morphisme fini ;*
2. *pour tout faisceau cohérent $\mathcal{F}$ sur $\{\omega = 0\}$, le faisceau $(p_{n+1,n})_*(\mathcal{F})$ est un faisceau cohérent sur W ;*
3. *Le morphisme naturel $\mathcal{O}_W^d \simeq \mathcal{O}_W[T]/\omega \to (p_{n+1,n})_*(\mathcal{O}_{\{\omega=0\}})$ est un isomorphisme sur W.*

Démonstration du lemme. Commençons par montrer que la projection sur les n pemières variables induit un morphisme fini $p_{n+1,n} : \{\omega = 0\} \to W$.

Soit $y \in W$. L'ensemble des antécédents de $p_{n+1,n}$ à y dans $\{\omega = 0\}$, s'identifie avec l'ensemble des points x de $\mathbb{A}^1_{\mathscr{H}(y)}$ en lesquels le polynôme $\omega(y)$ s'annule, c'est donc un ensemble fini. Soit, maintenant, K un compact de W_n. L'ensemble

$$\{x \in p_{n+1,n}^{-1}(K) | \omega(x) = 0\}$$

n'est autre que l'ensemble $\overline{D}_K(\omega; 0)$ qui est un ensemble compact.

Montrons maintenant le deuxième point du lemme. Soient $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent sur $\{\omega = 0\}$ et $y \in W$.

On pose $\{x_1, \ldots, x_k\} := \{\omega = 0\} \cap p_{n+1,n}^{-1}(\{y\})$.

Par définition de faisceau cohérent, pour tout i, il existe un voisinage U_{x_i} de x_i dans $p_{n+1,n}^{-1}(W)$ (tel que le morphisme $p_{n+1,n} : \{\omega = 0\} \cap U_{x_i} \to U_{x_i,n} := p_{n+1,n}(U_{x_i})$ soit encore un morphisme fini) tel qu'il existe une suite exacte de la forme suivante :

$$\mathcal{O}^{m_i}_{\{\omega=0\}\cap U_{x_i}} \to \mathcal{O}^{n_i}_{\{\omega=0\}\cap U_{x_i}} \to \mathcal{F}_{|\{\omega=0\}\cap U_{x_i}} \to 0.$$

Par le lemme 5.4, la suite suivante de $\mathcal{O}_{p_{n+1,n}(U_{x_i})}$-modules :

$$(p_{n+1,n})_*(\mathcal{O}_{\{\omega=0\}\cap U_{x_i}})^{m_i} \to (p_{n+1,n})_*(\mathcal{O}_{\{\omega=0\}\cap U_{x_i}})^{n_i} \to (p_{n+1,n})_*(\mathcal{F}_{|\{\omega=0\}\cap U_{x_i}}) \to 0$$

est encore exacte.

Qui plus est, quitte à réduire de nouveau U_{x_i}, on peut supposer qu'ils sont deux à deux disjoints et qu'il existe un voisinage V de y dans W tel que l'on ait l'égalité entre les deux ensembles $\coprod_{i=1}^k (\{\omega = 0\} \cap U_{x_i})$ et $\{\omega = 0\} \cap p_{n+1,n}^{-1}(V)$. Cela nous permet d'affirmer que le morphisme $p_{n+1,n} : \coprod_{i=1}^k (\{\omega = 0\} \cap U_{x_i}) \to V$ est encore fini.

Ainsi, il suffit de montrer le dernier point du lemme pour finir de montrer le deuxième.

Considérons $\psi : \mathcal{O}_V^d \to (p_{n+1,n})_*(\mathcal{O}_{\{\omega=0\}\cap p_{n+1,n}^{-1}(V)})$ le morphisme de $\mathcal{O}_V$-modules qui pour tout ouvert V' de V, à un d-uplet $(a_0,\dots,a_{d-1}) \in \mathcal{O}_V(V')^d$ associe la fonction $\sum_{i=0}^{d-1} a_i T_{n+1}^i \in \mathcal{O}_{\{\omega=0\}\cap p_{n+1,n}^{-1}(V)}(p_{n+1,n}^{-1}(V'))$ où T_{n+1} est la dernière variable de $\mathbb{A}_{\mathcal{A}}^{n+1}$.

Ce morphisme est un isomorphisme. En effet, soit $y' \in V$. On désignera par $\{x'_1,\dots,x'_{k'}\}$ l'ensemble fini $\{\omega=0\}\cap p_{n+1,n}^{-1}(\{y'\})$. Le Théorème de Weierstraß généralisé 5.5 assure que pour tout k'-uplet $(f_1,\dots,f_{k'}) \in \prod_{i=1}^{k'} \mathcal{O}_{\mathbb{A}_{\mathcal{A}}^{n+1},x'_i}$, il existe un unique élément $(r,q_1,\dots,q_{k'})$ appartenant à $\mathcal{O}_{\mathbb{A}_{\mathcal{A}}^n,y} \times \prod_{i=1}^{k'} \mathcal{O}_{\mathbb{A}_{\mathcal{A}}^{n+1},x'_i}$ tel que :

- pour tout i, nous avons $f_i = q_i\omega + r$ dans $\mathcal{O}_{\mathbb{A}_{\mathcal{A}}^{n+1},x'_i}$;
- le polynôme r est de degré strictement inférieur à d.

Ainsi, le morphisme $\psi : \mathcal{O}_{V,y'}^d \to (p_{n+1,n})_*(\mathcal{O}_{\{\omega=0\}\cap p_{n+1,n}^{-1}(V)})_{y'}$ est une bijection. Ceci étant vrai pour tout $y' \in V$ le morphisme $\psi : \mathcal{O}_V^d \to (p_{n+1,n})_*(\mathcal{O}_{\{\omega=0\}\cap p_{n+1,n}^{-1}(V)})$ est un isomorphisme. □

Passons maintenant au cas général. D'un point de vu intuitif, la proposition suivante signifie que "la finitude topologique" entraîne la "finitude algébrique".

Proposition 5.8. *Soient $\varphi : X \to Y$ un morphisme d'espaces analytiques qui est fini en tant qu'application continue et $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent sur X. Le faisceau $\varphi_*(\mathcal{F})$ est un faisceau cohérent.*

Démonstration de la proposition. Soit y un point de Y. Le fait d'être cohérent pour un faisceau étant une notion locale on peut remplacer Y par un voisinage de y.

Si y n'appartient pas à l'image de φ, puisque φ est fermé, il existe un voisinage V de y tel que $\varphi^{-1}(V)$ soit vide. Ainsi, $\varphi_*(\mathcal{F})$ est cohérent au voisinage de y.

Supposons donc que y appartient à l'image de φ. Puisque φ est fini, quitte à prendre V plus petit on peut supposer que $\varphi^{-1}(V)$ est une union finie disjointe d'ouverts $\coprod_i U_i$ tels que pour tout $x_i \in \varphi^{-1}(\{y\})$ l'ouvert U_i contient x_i. On note $\varphi_i : U_i \to V$ la restriction de φ à U_i. Nous avons l'isomorphisme $\varphi_*(\mathcal{F})_{|V} \simeq \prod_i (\varphi_i)_*(\mathcal{F}_{|U_i})$. Il suffit donc de montrer que pour tout i le faisceau $(\varphi_i)_*(\mathcal{F}_{|U_i})$ est un faisceau cohérent.

Quitte à rétrécir V et remplacer $\varphi^{-1}(V)$ par U_i (que l'on notera U par la suite), on peut supposer que $\varphi^{-1}(\{y\})$ est réduit à un singleton $\{x\}$ et qu'il existe des immersions fermées $i_U : U \to U'$ et $i_V : V \to V'$ où U' et V' sont des ouverts des espaces affines $\mathbb{A}_{\mathcal{A}}^k$ et $\mathbb{A}_{\mathcal{A}}^l$. Le morphisme $i_V \circ \varphi : U \to V'$ est encore un morphisme fini comme composé de morphismes finis. Pour montrer l'énoncé, il suffit de montrer que $(i_V \circ \varphi)_*$ respecte les faisceaux cohérents. Grâce à la proposition 4.11 on sait que $(\varphi, Id_U) : U \to V \times U$ est une immersion fermée. Ainsi on peut identifier grâce à ce morphisme U à un sous-espace analytique de $V \times U$ que l'on peut lui même identifier à un sous-espace analytique de $V' \times U'$ grâce au morphisme (i_V, i_U) (le fait que ce dernier morphisme soit une immersion fermée provient du fait que les immersions fermées soient stables par changement de base et composition). On pose $U'' := V' \times U'$. Ainsi nous sommes ramenés au cas où φ est la restriction de la projection $p : U'' \to V'$ à un sous-espace analytique fermé que l'on notera encore X de U''. On notera aussi $p : X \to V'$ cette restriction. Par abus de notation nous noterons x le point $(\varphi, i_U)(x)$.

Puisque nous nous sommes ramené à des sous-espaces analytiques d'ouverts d'espaces affines, nous allons pouvoir nous servir de l'outillage de Weierstraß. Pour cela nous allons procéder par récurrence sur la dimension k. Pour la suite nous identifierons U'' à un ouvert de $\mathbb{A}^{k+l}_{\mathcal{A}}$ en identifiant les fonctions coordonnées de V' avec les l premières variables et celle de U' avec les k dernières variables.

Le cas où $k = 0$ est évident puisque dans ce cas là p n'est autre que l'immersion fermée de X dans V'. En effet, dans ce cas U'' est un ouvert de V'. Ainsi $p : X \to V'$ est une immersion comme composition de l'immersion ouverte $U'' \to V'$ et de l'immersion fermée de $X \to U''$. Mais par hypothèse ce morphisme est aussi fermé. C'est donc une immersion fermée par la proposition 2.17.

Supposons maintenant que nous ayons démontré l'énoncé pour tout k appartenant à $[\![0, k_0]\!]$. Montrons l'énoncé pour $k_0 + 1$. On note $n = k_0 + l$.

On considère $p_{n+1,n} : U'' \to \mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}$ la projection sur les n premières variables. L'image de ce morphisme est un ouvert de $\mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}$. On pose $x_n := p_{n+1,n}(x)$. Par hypothèse sur V' et U', x est le seul antécédant dans X de $p(x)$ par p, ainsi c'est le seul de x_n par $p_{n+1,n}$. Il existe donc un germe de fonction g en x non nul une fois restreint à $\mathbb{A}^1_{\mathscr{H}(x_n)}$ et nul une fois restreint à X. Quitte à remplacer U'' par un ouvert W plus petit nous pouvons supposer que g est définie sur W tout entier et le sous-ensemble de W défini par l'annulation de g contient l'ensemble correspondant à l'intersection de W et X. En utilisant le Théorème de préparation de Weierstraß (voir le théorème 1.15), on peut affirmer que quitte à rétrécir W, on peut écrire g sous la forme d'un produit ωe dans $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^{n+1}_{\mathcal{A}}}(W)$ avec e un élément inversible de $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^{n+1}_{\mathcal{A}}}(W)$ et ω un élément de $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}}(p_{n+1,n}(W))[T]$ unitaire tel que $\omega(x_n)$ soit un polynôme non constant. On note d le degré de ω et $W_n := p_{n+1,n}(W)$ la projection sur les n premières variable de W.

Le lemme 5.7 assure que le morphisme $p_{n+1,n} : \{x \in p_{n+1,n}^{-1}(W_n) | \omega(x) = 0\} \to W_n$ est un morphisme fini. Par finitude, quitte à réduire W (et donc W_n), on peut supposer que $\{x \in W | \omega(x) = 0\}$ est un sous-espace analytique fermé de $\{x \in p_{n+1,n}^{-1}(W_n) | \omega(x) = 0\}$.

Ainsi nous sommes maintenant dans le cas où $p_{n+1,n} : X \to W_n$ est la restriction au sous-espace analytique X de la projection (finie)

$$p_{n+1,n} : \{x \in p_{n+1,n}^{-1}(W_n) | \omega(x) = 0\} \to W_n.$$

Soit $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent sur X. On note encore $\mathcal{F}$ l'extension par 0 de $\mathcal{F}$ au sous-espace analytique $\{x \in p_{n+1,n}^{-1}(W_n) | \omega(x) = 0\}$ qui est aussi son image directe par l'immersion fermée $X \to \{\omega = 0\}$. Le lemme 5.7 assure alors que $(p_{n+1,n})_*(\mathcal{F})$ est un faisceau cohérent sur W_n.

Nous pouvons maintenant affirmer que $p_{n+1,n}(X)$ est le support d'un faisceau cohérent de W_n. En effet, le morphisme $p_{n+1,n} : X \to W_n$ étant fini (en particulier fermé) l'image de ce morphisme est égale au support de $(p_{n+1,n})_*(\mathcal{O}_X)$ qui est un faisceau cohérent. Il suffit alors d'appliquer l'hypothèse de récurrence à $p_{n,l} : p_{n+1,n}(X) \to V'$ (que l'on peut encore supposer fini quitte à rétrécir V') pour conclure que $p_*(\mathcal{F}) \simeq (p_{n,l})_*((p_{n+1,n})_*(\mathcal{F}))$

est un faisceau cohérent pour tout faisceau cohérent $\mathcal{F}$ de X. □

5.3 Étude des morphismes finis

Dans cette section nous allons monter quelques propriétés des morphismes finis.

Commençons par exhiber un critère de finitude pour les morphismes entre espaces analytiques. La démonstration de ce critère est extrêmement similaire à la démonstration de la proposition 5.8.

Proposition 5.9. *Soient $\varphi : X \to Y$ un morphisme d'espaces analytiques et $y \in Y$ n'ayant qu'un nombre fini d'antécédents par φ. Il existe un voisinage U de y dans Y et un voisinage V de $\varphi^{-1}(\{y\})$ dans $\varphi^{-1}(U)$ tel que le morphisme induit $\varphi : V \to U$ soit fini.*

Démonstration de la proposition. Pour démontrer l'énoncé, il suffit de montrer que pour tout $x \in \varphi^{-1}(\{y\})$ il existe un voisinage ouvert U_x de x et un voisinage V_x de y tel que $\varphi(U_x)$ soit inclus dans V_x et tel que $\varphi : U_x \to V_x$ soit fini. En effet, quitte à rétrécir U_x et V_x, on peut supposer que pour tout $x \neq x' \in \varphi^{-1}(\{y\})$, $U_x \cap U_{x'} = \emptyset$ et que $V_x = V_{x'}$. Ainsi, le morphisme $\varphi : \coprod_{x \in \varphi^{-1}(\{y\})} U_x \to V_x$ est un morphisme fini. Nous sommes donc ramené à traiter le cas où $\varphi^{-1}(\{y\})$ est un singleton.

Commençons par réduire l'énoncé à un cas plus simple comme dans la dernière démonstration.

Quitte à remplacer X et Y par des voisinages U et V suffisamment petits de x et y tels que $\varphi(U) \subset V$, on peut supposer qu'il existe deux immersions fermées $i_U : U \to U'$ et $i_V : V \to V'$ avec U' et V' deux ouverts d'espaces affines $\mathbb{A}^k_{\mathcal{A}}$ et $\mathbb{A}^l_{\mathcal{A}}$. Il suffit de montrer que pour un voisinage suffisamment petit $i_V \circ \varphi : U \to V'$ est fini. Ainsi, le morphisme $\varphi : U \to V'$ se factorise en l'immersion fermée

$$(i_V, i_U) \circ (\varphi, Id_U) : U \to V \times U \to V' \times U'$$

(c'est une immersion fermée comme composition de deux immersions fermées) et la projection $p := p_{k+l,l} : V' \times U' \to V'$. On note $U'' := V' \times U'$ et $p : U'' \to V'$ la projection. Ainsi nous sommes ramené au cas où φ est la restriction de la projection $p : U'' \to V'$ à un sous-espace analytique que l'on notera encore X de U'' tel que $p(x)$ admette un seul antécédent dans X par la projection p. On notera aussi $p : X \to V'$ cette restriction. Par abus de notation nous noterons encore x le point $(\varphi, i_U)(x)$.

Nous allons démontrer l'énoncé par récurrence sur la dimension k. Le cas où $k = 0$ est évident puisque dans ce cas $\varphi : X \to V'$ est une immersion. Ainsi quitte à remplacer V' par un voisinage de y, nous sommes dans le cas où φ est une immersion fermée.

Supposons maintenant que nous ayons démontré l'énoncé pour un k donné, montrons-le pour $k + 1$. On note $n := k + l$. Commençons par montrer que la projection sur les n premières variables $p_{n+1,n} : X \to p_{n+1,n}(U'')$ est un morphisme fini d'un voisinage de x sur un voisinage de $x_n := p_{n+1,n}(x)$.

Puisque $p_{n+1,n}(x)$ n'a qu'un seul antécédent x dans X par $p_{n+1,n}$, il existe un germe de fonction $f \in \mathcal{O}_{\mathbb{A}^{n+1}_{\mathcal{A}},x}$ non nul une fois restreint à $\mathbb{A}^1_{\mathscr{H}(x_n)}$ et appartenant à l'idéal de définition de X. En utilisant le Théorème de préparation de Weierstraß (voir le théorème 1.15), on peut affirmer qu'il existe un voisinage W de x tel que l'on peut écrire f sous la forme d'un produit ωe dans $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^{n+1}_{\mathcal{A}}}(W)$ avec e un élément inversible de $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^{n+1}_{\mathcal{A}}}(W)$ et ω un élément de $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^{n}_{\mathcal{A}}}(p_{n+1,n}(W))[T]$ tel que $\omega(x_n)$ est un polynôme non constant. On note d le degré de ω et W_n la projection sur les n premières variables de W.

Le lemme 5.7 permet d'affirmer que $p_{n+1,n} : \{x \in p_{n+1,n}^{-1}(W_n) | \omega(x) = 0\} \to W_n$ est un morphisme fini. Cela implique que $p_{n+1,n} : X \to W_n$ est fini puisque c'est la restriction d'un morphisme fini à un fermé.

La proposition 5.8 nous assure que $p_{n+1,n}(X)$ est un sous-espace analytique de W_n. Ainsi par hypothèse de récurrence, quitte à rétrécir les voisinages $p_{n,l} : p_{n+1,n}(X) \to V'$ est fini et donc φ l'est aussi. □

Proposition 5.10. *Les morphismes d'espaces analytiques finis sont stables par changement de base dans $\mathcal{A} - An$ (la catégorie des espaces analytiques au-dessus de $\mathcal{A}$). De plus, les morphismes d'espaces analytiques propres (c'est-à-dire tel que l'application continue correspondante soit propre) sont eux aussi stables par changement de base dans $\mathcal{A} - An$.*

Démonstration de la proposition. Soient $\varphi : X \to Y$ un morphisme d'espaces analytiques fini et $\psi : Z \to Y$ un morphisme d'espaces analytiques. Il nous faut montrer que le morphisme $\varphi' : X \times_Y Z \to Z$ est un morphisme fini d'espaces analytiques. Pour cela il nous suffira de montrer que pour tout z appartenant à Z, $\varphi'^{-1}(\{z\})$ est un ensemble fini et que $|\varphi'| : |X \times_Y Z| \to |Z|$ est un morphisme propre.

Commençons par la finitude (ensembliste) des fibres.

Soit z un point de Z. On note $y := \psi(z)$. Grâce à la proposition 4.17, il suffit de montrer que $(X \times_Y Z) \times_Z \{z\}$ est un ensemble fini. Nous allons montrer que $(X \times_Y Z) \times_Z \{z\}$ et $(X \times_Y \{y\}) \widehat{\otimes}_{\mathscr{H}(y)} \mathscr{H}(z)$ sont isomorphes.

En utilisant la proposition 4.7, nous obtenons la suite d'isomorphismes suivante :

$$\begin{aligned}
(X \times_Y Z) \times_Z \{z\} &\simeq ((X \times_Y Z)\widehat{\otimes}_{\mathcal{A}}\mathscr{H}(z)) \times_{Z\widehat{\otimes}_{\mathcal{A}}\mathscr{H}(z)} \{z\} \\
&\simeq (X\widehat{\otimes}_{\mathcal{A}}\mathscr{H}(z) \times_{Y\widehat{\otimes}_{\mathcal{A}}\mathscr{H}(z)} Z\widehat{\otimes}_{\mathcal{A}}\mathscr{H}(z)) \times_{Z\widehat{\otimes}_{\mathcal{A}}\mathscr{H}(z)} \{z\} \\
&\simeq X\widehat{\otimes}_{\mathcal{A}}\mathscr{H}(z) \times_{Y\widehat{\otimes}_{\mathcal{A}}\mathscr{H}(z)} \{z\} \\
&\simeq X\widehat{\otimes}_{\mathcal{A}}\mathscr{H}(y)\widehat{\otimes}_{\mathscr{H}(y)}\mathscr{H}(z) \times_{Y\widehat{\otimes}_{\mathcal{A}}\mathscr{H}(y)\widehat{\otimes}_{\mathscr{H}(y)}\mathscr{H}(z)} \{y\}\widehat{\otimes}_{\mathscr{H}(y)}\mathscr{H}(z) \\
&\simeq (X\widehat{\otimes}_{\mathcal{A}}\mathscr{H}(y) \times_{Y\widehat{\otimes}_{\mathcal{A}}\mathscr{H}(y)} \{y\})\widehat{\otimes}_{\mathscr{H}(y)}\mathscr{H}(z) \\
&\simeq (X \times_Y \{y\})\widehat{\otimes}_{\mathscr{H}(y)}\mathscr{H}(z).
\end{aligned}$$

Ainsi, il suffit de montrer que l'espace $\mathscr{H}(z)$-analytique $(X \times_Y \{y\})\widehat{\otimes}_{\mathscr{H}(y)}\mathscr{H}(z)$ a un ensemble sous-jacent fini.

Puisque l'ensemble sous-jacent à l'espace $\mathscr{H}(y)$-analytique $\varphi^{-1}(\{y\})$ est fini, le morphisme $\varphi : \varphi^{-1}(\{y\}) \to \{y\}$ est un morphisme fini d'espaces $\mathscr{H}(y)$-analytiques. La proposition 5.8 implique que pour tout $x \in \varphi^{-1}(\{y\})$, $\mathcal{O}_{X,x}$ est un $\mathcal{O}_{Y,y}$-module de type fini. Cela implique que $\kappa(x)$ est un $\kappa(y)$-espace vectoriel de dimension finie et donc que $\mathscr{H}(x)$

est un $\mathscr{H}(y)$-espace vectoriel de dimension finie. Ainsi, pour tout $x \in \varphi^{-1}(\{y\})$ l'ensemble $\{x\}\widehat{\otimes}_{\mathscr{H}(y)}\mathscr{H}(z)$ est un ensemble fini (par construction du foncteur d'extension des scalaires, il s'identifie à l'ensemble des $\mathscr{H}(z)$-semi-normes multiplicatives bornées de $\mathscr{H}(x) \otimes_{\mathscr{H}(y)} \mathscr{H}(z)$ qui est un $\mathscr{H}(z)$-espace vectoriel de type fini). Ainsi, l'isomorphisme

$$(X \times_Y \{y\})\widehat{\otimes}_{\mathscr{H}(y)}\mathscr{H}(z) \simeq \coprod_{x\in\varphi^{-1}(\{y\})} \{x\}\widehat{\otimes}_{\mathscr{H}(y)}\mathscr{H}(z)$$

assure que l'ensemble $\varphi'^{-1}(\{z\}) \simeq (X \times_Y \{y\})\widehat{\otimes}_{\mathscr{H}(y)}\mathscr{H}(z)$ est fini comme union finie d'ensembles finis.

Passons maintenant au caractère propre.

Les morphismes d'espaces topologiques propres sont stables par changement de base ce qui entraîne que l'application $|X| \times_{|Y|} |Z| \to |Z|$ est propre. Or nous savons, de plus, grâce à la proposition 4.19 et la proposition 4.16 que le morphisme $|X \times_Y Z| \to |X| \times_{|Y|} |Z|$ est propre (comme morphisme d'espaces topologiques) lui aussi. Ainsi, nous pouvons affirmer que le morphisme $|X \times_Y Z| \to |Z|$ est propre comme composée de morphismes propres. $\square$

Soit $x \in \mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}$. Quitte à permuter les variables, on peut supposer qu'il existe $k \in [\![0, n]\!]$ tel que x_k soit purement localement transcendant au-dessus de $\pi(x)$ et tel que x soit rigide épais au-dessus de x_k. Nous allons montrer un résultat qui nous permettra ensuite de nous ramener au cas plus simple où x est le point rigide épais au-dessus de x_k correspondant à l'idéal $(T_{k+1}, \ldots, T_n)$. C'est l'équivalent de la translation dans le cas de la géométrie complexe.

Proposition 5.11. *Soit $x \in \mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}$. On note x_k la projection sur les k premières variables de x et $0_{x_k,n}$ le point rigide épais au-dessus x_k correspondant à l'idéal $(T_{k+1}, \ldots, T_n)$.*

Il existe un morphisme fini φ_x allant d'un voisinage U de x dans un voisinage V de $0_{x_k,n}$, tel que $\varphi_x^{-1}(\{0_{x_k,n}\}) = \{x\}$, $U_k := p_{n,k}(U) = p_{n,k}(V)$ et rendant le diagramme suivant commutatif

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "\varphi_x"] \arrow[d, "p_{n,k}"] & V \arrow[d, "p_{n,k}"] \\ U_k \arrow[r, "Id_{U_k}"] & U_k \end{tikzcd} .$$

Démonstration de la proposition. On note $l := n - k$. Nous allons démontrer cet énoncé par récurrence sur l. Dans le cas où $l = 0$, il n'y a rien à montrer.

Supposons que nous ayons montré l'énoncé pour l et montrons le pour $l+1$. Puisque x est rigide épais au-dessus de x_k, il l'est au-dessus de x_{n-1}. Soit $P_n \in \kappa(x_{n-1})[T]$ le polynôme minimal unitaire correspondant à x. Nous pouvons relever ce polynôme en une fonction $\tilde{P}_n \in \mathcal{O}_{\mathbb{A}^{n-1},x_{n-1}}[T]$. Il existe un voisinage compact spectralement convexe V de x_{n-1} tel que chacun des coefficients de $\tilde{P}_n$ soit $\mathcal{B}$-défini sur V. On note $\varphi_{\tilde{P}_n} : \mathbb{A}^1_{\mathcal{B}(V)} \to \mathbb{A}^1_{\mathcal{B}(V)}$ le morphisme d'espaces $\mathcal{B}(V)$-analytiques associé au morphisme d'algèbres

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{B}(V)[T] & \to & \mathcal{B}(V)[T] \\ T & \mapsto & \tilde{P}_n \end{array}$$

tel qu'on l'a construit dans l'exemple 2.4. Nous procédons à l'identification usuelle de $\mathbb{A}^1_{\mathcal{B}(V)}$ à un voisinage de x dans $\mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}$. On notera $\overbrace{\mathbb{A}^1_{\mathcal{B}(V)}}^{\circ}$ l'intérieur topologique de $\mathbb{A}^1_{\mathcal{B}(V)}$ dans $\mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}$.

Nous allons montrer que $0_{x_{n-1},n}$ n'a que x comme antécédent par $\varphi_{\tilde{P}_n} : \overbrace{\mathbb{A}^1_{\mathcal{B}(V)}}^{\circ} \to \overbrace{\mathbb{A}^1_{\mathcal{B}(V)}}^{\circ}$ et que ce dernier morphisme fait commuter le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} \overbrace{\mathbb{A}^1_{\mathcal{B}(V)}}^{\circ} \arrow[r, "\varphi_{\tilde{P}_n}"] \arrow[d, "p_{n,k}"] & \overbrace{\mathbb{A}^1_{\mathcal{B}(V)}}^{\circ} \arrow[d, "p_{n,k}"] \\ U_k \arrow[r, "Id_{U_k}"] & U_k \end{tikzcd}$$

où U_k est la projection sur les k premières variables de $\mathring{V} \subset \mathbb{A}^{n-1}_{\mathcal{A}}$.

Le fait que le diagramme soit commutatif est dû au fait que ce morphisme provienne d'un morphisme d'espaces $\mathcal{B}(V)$-analytiques.

Montrons maintenant que nous avons l'égalité $\{x\} = \varphi^{-1}_{\tilde{P}_n}(\{0_{x_{n-1},n}\})$. On remarque que $\varphi^{-1}_{\tilde{P}_n}(\{0_{x_{n-1},n}\})$ n'est autre que l'ensemble des semi-normes sur $\mathcal{A}[T_1, \ldots, T_n]$ qui sont égales à x_{n-1} sur les $n-1$ premières variables (elle se factorise donc par $\kappa(x_{n-1})[T]$) et nulles une fois évaluées en P_n. Soit y une telle semi-norme, elle se factorise donc par le corps $\kappa(x_{n-1})[T]/(P_n) \simeq \kappa(x)$. Cela implique qu'elle est égale à x.

La proposition 5.8 assure que le morphisme $\varphi_{\tilde{P}_n}$ induit un morphisme fini d'un voisinage ouvert U_n de x sur un voisinage ouvert V_n de $0_{x_{n-1},n}$.

Or, par hypothèse de récurrence, il existe un morphisme fini $\varphi_{x_{n-1}} : U_{n-1} \to V_{n-1}$ où U_{n-1} (resp. V_{n-1}) est un voisinage de x (resp. $0_{x_k,n-1}$) dans $\mathbb{A}^{n-1}_{\mathcal{A}}$ tel que $0_{x_k,n-1}$ n'est que x comme antécédent par ce morphisme et faisant commuter le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} U_{n-1} \arrow[r, "\varphi_x"] \arrow[d, "p_{n-1,k}"] & V_{n-1} \arrow[d, "p_{n-1,k}"] \\ U_k \arrow[r, "Id_{U_k}"] & U_k \end{tikzcd} .$$

Les morphismes finis étant stables par changement de base, le morphisme obtenu par produit fibré $(Id_{\mathbb{A}^1_{\mathcal{A}}}, \varphi_{x_{n-1}}) : \mathbb{A}^1 \times U_{n-1} \to \mathbb{A}^1 \times V_{n-1}$ est encore un morphisme fini. Ainsi quitte à réduire U_n et V_{n-1}, nous pouvons composer les deux morphisme en un morphisme fini

$$\varphi_x := \varphi_{x_{n-1}} \circ \varphi_{\tilde{P}_n} : U_n \to \mathbb{A}^1_{\mathcal{A}} \times V_{n-1}$$

tel que $\varphi_x^{-1}(\{0_{x_k,n}\}) = \{x\}$ et faisant commuter le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} U_n \arrow[r, "\varphi_x"] \arrow[d, "p_{n,k}"] & \mathbb{A}^1_{\mathcal{A}} \times V_{n-1} \arrow[d, "p_{n,k}"] \\ U_k \arrow[r, "Id_{U_k}"] & U_k \end{tikzcd} .$$

□

Considérons maintenant un diagramme commutatif d'espaces analytiques :

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, "\chi"] \arrow[d, "\rho"] & Z \arrow[d, "\psi"] \\ X \arrow[r, "\varphi"] & Y. \end{tikzcd}$$

Soit $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X$-module. Il existe un morphisme naturel

$$\psi^*(\varphi_*(\mathcal{F})) \to \chi_*(\rho^*(\mathcal{F})).$$

Ce morphisme n'a *a priori* aucune raison d'être un isomorphisme même dans le cas où le diagramme commutatif est cartésien. Si on considére, par exemple, le diagramme cartésien suivant :

$$\begin{tikzcd} \mathbb{A}^2_{\mathbb{C}} \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, "p_2"] & \mathbb{A}^1_{\mathbb{C}} \arrow[d, "\pi"] \\ \mathbb{A}^1_{\mathbb{C}} \arrow[r, "\pi"] & \star \end{tikzcd}$$

Le morphisme $\pi^*(\pi_*(\mathcal{O}_{\mathbb{A}^1_{\mathcal{A}}})) \to (p_1)_*((p_2)^*(\mathcal{O}_{\mathbb{A}^1_{\mathcal{A}}}))$ n'est pas un isomorphisme. En effet, nous avons les deux isomorphismes :

$$\pi^*(\pi_*(\mathcal{O}_{\mathbb{A}^1_{\mathcal{A}}}))_0 \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{A}^1_{\mathbb{C}},0} \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{\mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}}(\mathbb{A}^1_{\mathbb{C}})$$

$$(p_1)_*((p_2)^*(\mathcal{O}_{\mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}}))_0 \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}}(p_1^{-1}(\{0\})).$$

Le second contenant strictement le premier ces deux modules ne sont pas isomorphes.

Cependant dans le cas où φ est un morphisme fini, nous avons l'énoncé suivant :

Proposition 5.12. *Soient $\psi : Z \to Y$ un morphisme d'espaces analytiques au-dessus de d'un morphisme d'algèbres de Banach $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, $\varphi : X \to Y$ un morphisme d'espaces $\mathcal{A}$-analytiques, tel que $\varphi : X \to Y$ soit fini et $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent sur X.*

On note $\chi : X \times_Y Z \to Z$ le changement de base de φ par ψ et $\rho : X \times_Y Z \to Y$ le changement de base de ψ par φ.

Le morphisme naturel $\psi^*(\varphi_*(\mathcal{F})) \to \chi_*(\rho^*(\mathcal{F}))$ est un isomorphisme.

Avant de procéder à la démonstration de cette proposition remarquons le fait suivant :

Soient deux carrés cartésiens accolés,

$$\begin{tikzcd} X \times_Z T \arrow[r] \arrow[d] & Y \times_Z T \arrow[r] \arrow[d] & T \arrow[d] \\ X \arrow[r] & Y \arrow[r] & Z \end{tikzcd}$$

et $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent sur X. Si les deux morphismes naturels évoqués ci-dessus correspondant à chacun des carrés sont des isomorphismes, le morphisme correspondant au carré cartésien

$$\begin{tikzcd} X \times_Z T \arrow[r] \arrow[d] & T \arrow[d] \\ X \arrow[r] & Z \end{tikzcd}$$

est, lui aussi, un isomorphisme.

Démonstration de la proposition. Soit $z \in Z$.

Il nous faut montrer que le morphisme naturel $\psi^*(\varphi_*(\mathcal{F}))_z \to \chi_*(\rho^*(\mathcal{F}))_z$ est un isomorphisme. On pose $y := \psi(z)$ et $T := X \times_Y Z$.

Nous allons dans un premier temps nous intéresser à chacun des modules séparément. On a un isomorphisme naturel $\psi^*(\varphi_*(\mathcal{F}))_z \simeq \left(\prod_{x \in \varphi^{-1}(\{\psi(z)\})} \mathcal{F}_x\right) \otimes_{\mathcal{O}_{Y,\psi(z)}} \mathcal{O}_{Z,z}$. De même on a l'isomorphisme $\chi_*(\rho^*(\mathcal{F}))_z \simeq \prod_{t \in \chi^{-1}(\{z\})} \mathcal{F}_{\rho(t)} \otimes_{\mathcal{O}_{X,\rho(t)}} \mathcal{O}_{T,t}$. Pour montrer l'énoncé, il suffit de montrer que pour tout $x \in \varphi^{-1}(\{\psi(z)\})$ le morphisme naturel suivant

$$\mathcal{F}_x \otimes_{\mathcal{O}_{Y,\psi(z)}} \mathcal{O}_{Z,z} \to \prod_{t \in \chi^{-1}(\{z\})} \mathcal{F}_{\rho(t)} \otimes_{\mathcal{O}_{X,\rho(t)}} \mathcal{O}_{T,t}$$

induit un isomorphisme entre $\mathcal{F}_x \otimes_{\mathcal{O}_{Y,\psi(z)}} \mathcal{O}_{Z,z}$ et $\prod_{t \in \rho^{-1}(\{x\})} \mathcal{F}_x \otimes_{\mathcal{O}_{X,\rho(t)}} \mathcal{O}_{T,t}$. Ainsi l'énoncé est local en X, Y et Z.

On peut donc supposer que X, Y et Z sont des sous-espaces analytiques d'ouverts d'espaces affines U, V et W et que x est le seul antécédent de y pour φ. On peut, de plus, supposer que les morphismes φ et ψ s'étendent en des morphismes d'espaces analytiques entre ouverts d'espaces affines $\tilde{\varphi} : U \to V$ et $\tilde{\psi} : W \to V$. Qui plus est, puisque le morphisme naturel $T \to X \times_V Z$ est un isomorphisme, nous pouvons supposer que Y est un ouvert d'un espace affine $\mathbb{A}^l_{\mathcal{A}}$.

De la même manière que dans la démonstration de la proposition 5.8, nous pouvons nous ramener au cas où $\varphi : X \to Y$ est la restriction de la projection $p_{n,l} : U' \to Y$ à un sous-espace analytique d'un ouvert $U' \subset \mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}$, isomorphe à X. Nous identifierons X à ce sous-espace analytique de U'. Nous noterons $p : U' \to Y$ cette projection ainsi que sa restriction à X.

Nous allons montrer que le morphisme $\psi^*(p_*(\mathcal{F})) \to \chi_*(\rho^*(\mathcal{F}))$ est un isomorphisme par récurrence sur $n - l$.

Si $n - l = 0$ il n'y a rien à montrer car dans ce cas $p : X \to Y$ est une immersion fermée et le morphisme considéré est alors un isomorphisme.

Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons que nous ayons montré l'énoncé pour $n - l = k$. Montrons le pour $n - l = k + 1$.

Nous allons comme dans la démonstration de la proposition 5.8 commencer par considérer la projection sur les $n - 1$ premières variables.

On remarque que grâce au critère de finitude 5.9 et à la proposition 5.8, quitte à réduire U' on peut supposer que l'image de X par $p_{n,n-1}$, que l'on notera X_{n-1} est le support d'un faisceau cohérent. On le munit de la structure de sous-espace analytique de $U'_{n-1} := p_{n,n-1}(U')$ définie par le noyau du morphisme $\mathcal{O}_{U'_{n-1}} \to (p_{n,n-1})_*(\mathcal{O}_X)$ (qui est un faisceau d'idéaux cohérent comme noyau d'un morphisme de faisceaux cohérents). On note x_{n-1} la projection de x sur les $n-1$ premières variables. Nous avons le diagramme composé de carrés cartésiens suivant :

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, "\chi'_{n-1}"'] \arrow[d, "\rho"] & X_{n-1} \times_Y Z \arrow[r, "\chi_{n-1}"'] \arrow[d, "\rho_{n-1}"'] & Z \arrow[d, "\psi"] \\ X \arrow[r, "p_{n,n-1}"] & X_{n-1} \arrow[r, "p_{n-1,l}"] & Y \end{tikzcd}$$

où l'on note χ_{n-1} le changement de base de $p_{n-1,l}$ par le morphisme ψ et ρ_{n-1} le changement de base de ψ par $p_{n-1,l}$.

Par hypothèse de récurrence, nous savons que pour tout faisceau cohérent $\mathcal{F}$ sur X_{n-1} la flèche naturelle $\psi^*((p_{n-1,l})_*(\mathcal{F})) \to (\chi_{n-1})_*((\rho_{n-1})^*(\mathcal{F}))$ est un isomorphisme. Pour montrer l'énoncé souhaité il suffit de montrer que pour tout faisceau cohérent $\mathcal{F}$ sur X, le morphisme naturel $(\rho_{n-1})^*((p_{n,n-1})_*(\mathcal{F})) \to (\chi'_{n-1})_*((\rho)^*(\mathcal{F}))$ est un isomorphisme.

De nouveau, le morphisme naturel $X \times_{X_{n-1}} (X_{n-1} \times_Y Z) \to X \times_{U'_{n-1}} (X_{n-1} \times_Y Z)$ est un isomorphisme. Nous pouvons, donc, remplacer X_{n-1} par U'_{n-1}. Puisque x est le seul antécédent de x_{n-1} dans X par $p_{n,n-1}$, il existe un germe $f \in \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_{\mathcal{A}},x}$ non nul une fois restreint à $\mathbb{A}^1_{\mathscr{H}(x_{n-1})}$ tel que la restriction de f à X soit nulle. Par le Théorème de préparation de Weierstraß 1.15 il existe un unique couple de germes $e \in \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_{\mathcal{A}},x}$ et $\omega \in \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_{\mathcal{A}},x}$ tel que e soit inversible et $\omega \in \mathcal{O}_{U'_{n-1},x_{n-1}}[T]$ soit un polynôme unitaire et $e\omega = f$. On note d le degré de ω.

Ainsi, de la même manière que dans la proposition 5.8, quitte à rétrécir X et U'_{n-1}, nous sommes ramené à traiter le cas où X est le sous-espace analytique de $p^{-1}_{n,n-1}(U'_{n-1})$ défini par un polynôme unitaire $\omega \in \mathcal{O}_{U'_{n-1}}(U'_{n-1})[T]$.

Commençons par remarquer qu'il suffit de montrer la formule dans le cas où $\mathcal{F}$ est le faisceau $\mathcal{O}_X$. En effet, soit $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent sur X. Il existe une suite exacte :

$$\mathcal{O}_X^m \to \mathcal{O}_X^l \to \mathcal{F} \to 0.$$

En utilisant la finitude de $p_{n,n-1}$ et χ'_{n-1} on sait que les deux suites suivantes :

$$(\chi'_{n-1})_*((\rho)^*(\mathcal{O}_X))^m \to (\chi'_{n-1})_*((\rho)^*(\mathcal{O}_X))^l \to (\chi'_{n-1})_*((\rho)^*(\mathcal{F})) \to 0$$

et

$$(\rho_{n-1})^*((p_{n,n-1})_*(\mathcal{O}_X))^m \to (\rho_{n-1})^*((p_{n,n-1})_*(\mathcal{O}_X))^l \to (\rho_{n-1})^*((p_{n,n-1})_*(\mathcal{F})) \to 0$$

sont exactes. Ainsi, il suffit de montrer que le morphisme naturel

$$(\rho_{n-1})^*((p_{n,n-1})_*(\mathcal{O}_X)) \to (\chi'_{n-1})_*((\rho)^*(\mathcal{O}_X)) \simeq (\chi'_{n-1})_*(\mathcal{O}_T)$$

est un isomorphisme. Pour cela, comme remarqué en début de preuve, il suffit de montrer que pour tout $z \in X_{n-1} \times_Y Z$ le morphisme

$$(\rho_{n-1})^*((p_{n,n-1})_*(\mathcal{O}_X))_z \to (\chi'_{n-1})_*(\mathcal{O}_T)_z$$

est un isomorphisme.

Le produit fibré T est isomorphe au sous-espace analytique de $p_{n,n-1}^{-1}(U'_{n-1}) \times_Y Z$ défini par le polynôme unitaire $(\rho_{n-1})^{\#}(\omega)$ qui est de degré d. Le lemme 5.7 assure que pour tout $z \in X_{n-1} \times_Y Z$, $(\chi'_{n-1})_*(\mathcal{O}_T)_z$ est isomorphe à $\mathcal{O}_{X_{n-1}\times_Y Z,z}[T]/\omega \simeq \mathcal{O}^d_{X_{n-1}\times_Y Z,z}$. Nous obtenons de même la suite d'isomorphisme

$$(p_{n,n-1})_*(\mathcal{O}_X)_{\rho_{n-1}(z)} \simeq \mathcal{O}_{U'_{n-1},\rho_{n-1}(z)}[T]/\omega \simeq \mathcal{O}^d_{U'_{n-1},\rho_{n-1}(z)}.$$

Ce qui implique que $(\rho_{n-1})^*((p_{n,n-1})_*(\mathcal{O}_X))_z \simeq \mathcal{O}^d_{X_{n-1}\times_Y Z,z}$ et donc que le morphisme naturel

$$(\rho_{n-1})^*((p_{n,n-1})_*(\mathcal{O}_X))_z \to (\chi'_{n-1})_*(\mathcal{O}_T)_z$$

est un isomorphisme. □

5.4 Nullstellensatz de Rückert

Nous allons démontrer un résultat qui est un analogue d'un résultat d'analyse complexe, le "Rückert Nullstellensatz" (voir [GR84] 3.2.2.).

Avant de commencer la preuve du théorème, commençons par faire la remarque suivante. Soit $x \in \mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}$ au-dessus d'un point $b := \pi(x) \in B$ tel que $\mathcal{O}_{B,b}$ est un anneau fortement de valuation discrète d'uniformisante π_b. Le germe $\pi_b \in \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_{\mathcal{A}},x}$ est non nul, ainsi si U un voisinage de x dans $\mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}$ tel que π_b soit défini sur U, le sous-ensemble analytique $\{y \in U |\, |\pi_b(y)| = 0\}$ n'est pas un voisinage de x.

Soient $\mathcal{B}$ une algèbre de Banach et P un polynôme unitaire de degré strictement supérieur à 1 à coefficients dans $\mathcal{B}$. Nous utiliserons dans cette partie le morphisme

$$\varphi_P : \mathbb{A}^1_{\mathcal{B}} \to \mathbb{A}^1_{\mathcal{B}}$$

associé au morphisme d'algèbres

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{B}[T] & \to & \mathcal{B}[T] \\ T & \mapsto & P \end{array}$$

que nous avons déjà utilisé dans la preuve de la proposition 5.11. Rappelons que ce morphisme est fini (Proposition 5.5.1. [Poi10] ou avec la proposition 5.9 du présent texte).

Théorème 5.13. *Soit U un ouvert de $\mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}$, et soit x un point U. Soient $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent sur U et $f \in \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}}(U)$ une fonction analytique nulle en tout point du support de $\mathcal{F}$. Il existe $d \in \mathbb{N}$ tel que $f^d\mathcal{F}_x = 0$.*

Démonstration du théorème. Le cas où f est nulle au voisinage de x est clair. De même, le cas où f est non nulle en x est clair puisque dans ce cas x n'appartient pas au support de $\mathcal{F}$ et donc $\mathcal{F}_x = 0$. À partir de maintenant, nous supposons que nous ne sommes pas dans ces cas.

Soit $x \in \mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}$. Quitte à permuter les variables, on peut affirmer qu'il existe $k \in [\![0, n]\!]$ tel que $x_k := p_{n,k}(x)$ soit purement localement transcendant au-dessus de $\pi(x)$ et x soit rigide épais au-dessus de x_k. Nous allons commencer par montrer l'énoncé dans le cas $n-k=0$. Puis nous montrerons que lorsque $n-k>0$, nous pouvons nous ramener au cas où x est le point rigide épais au-dessus de x_k correspondant à l'idéal $(T_{k+1}, \ldots, T_n)$ et où f est la fonction $k+1$-ème coordonné T_{k+1}. Enfin, nous démontrerons l'énoncé dans ce cas par récurrence sur $n-k$.

Plaçons-nous dans le cas où $n-k=0$. D'après le corollaire 9.11 de [Poi13], $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_{\mathcal{A}},x}$ est un anneau fortement de valuation discrète (resp. un corps fort) si $\mathcal{O}_{B,b}$ est un anneau fortement de valuation discrète (resp. un corps fort).

Nous avons déjà traité le cas où $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_{\mathcal{A}},x}$ est un corps fort, puisque dans ce cas si f est non nul dans $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_{\mathcal{A}},x}$, $f(x)$ est non nul.

Supposons maintenant que $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_{\mathcal{A}},x}$ soit un anneau fortement de valuation discrète. Puisque la fonction f est non nulle au voisinage de x, on peut l'écrire de manière unique sous la forme $h\pi_x^l$ dans $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_{\mathcal{A}},x}$ où π_x est une uniformisante de $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_{\mathcal{A}},x}$, h est un élément inversible de $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_{\mathcal{A}},x}$ et $l \in \mathbb{N}$ strictement positif (car $f(x)=0$). Ainsi, par hypothèse, le support de $\mathcal{F}$ est inclus dans le sous-espace analytique $\{f=0\}$ qui est un sous-espace analytique de $\{\pi_x = 0\}$. Par conséquent, comme nous l'avons remarqué au début de cette section, le support de $\mathcal{F}$ est d'intérieur vide au voisinage de x. En particulier, son support n'est pas un voisinage de x, ce qui implique qu'il existe g non nul dans $Ann\mathcal{F}_x$ (où $Ann\mathcal{F}$ est le faisceau d'idéaux des annulateurs de $\mathcal{F}$). Autrement dit, il existe g non nul dans $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_{\mathcal{A}},x}$ tel que $g\mathcal{F}_x$ soit nul. En utilisant encore une fois le fait que l'on est dans un anneau de valuation discrète on en déduit qu'il existe $v \in \mathbb{N}$ tel que $\pi_x^v\mathcal{F}_x$ soit nul. Soit $d \in \mathbb{N}$ tel que $dl \geq v$ alors on a

$$f^d\mathcal{F}_x \simeq h^d\pi_x^{dl}\mathcal{F}_x \simeq h^d\pi_x^{dl-v}(\pi_x^v\mathcal{F}_x) = 0.$$

Plaçons nous maintenant dans le cas où $n-k>0$. Montrons que l'on peut se ramener au cas où x est le point rigide épais au-dessus de x_k correspondant à l'idéal $(T_{k+1}, \ldots, T_n)$ et où f est la fonction $k+1$-ème coordonné T_{k+1}.

Considérons le morphisme $(i, f) : U \to U \times \mathbb{A}^1_{\mathcal{A}}$, correspondant au produit fibré de l'identité $i : U \to U$ et du morphisme associé à la fonction f allant de U dans $\mathbb{A}^1_{\mathcal{A}}$. Nous pouvons identifier $U \times \mathbb{A}^1_{\mathcal{A}}$ à l'ouvert $p^{-1}_{n+1,n}(U)$ de $\mathbb{A}^{n+1}_{\mathcal{A}}$ en envoyant la variable T de $\mathbb{A}^1_{\mathcal{A}}$ sur T_{n+1} dans $\mathbb{A}^{n+1}_{\mathcal{A}}$. Ce morphisme est une immersion fermée (voir la proposition 4.11), on peut donc identifier U à un sous-espace analytique fermé de l'ouvert $p^{-1}_{n+1,n}(U) \subset \mathbb{A}^{n+1}_{\mathcal{A}}$ via (i, f).

Considérons maintenant le faisceau cohérent $(i, f)_*(\mathcal{F})$. Pour tout point y de $p^{-1}_{n+1,n}(U)$ tel que $(i, f)_*(\mathcal{F})_y$ soit non nul, $T_{n+1}(y) = 0$ (c'est le cas de $(i, f)(x)$). En effet, si $(i, f)_*(\mathcal{F})_y$ est non nul alors y admet un (unique) antécédent par (i, f). De plus, nous avons l'isomorphisme

$$0 = (i, f)_*(\mathcal{F})_y = \mathcal{F}_{(i,f)^{-1}(y)},$$

ce qui implique par hypothèse la suite d'égalité

$$T_{n+1}(y) = (i,f)^{\#}(f)(y) = f((i,f)^{-1}(y)) = 0.$$

Puisque $T_{n+1}^d (i,f)_*(\mathcal{F})_{(i,f)(x)}$ est isomorphe à $(i,f)_*(f^d\mathcal{F})_x$, il suffit de montrer que si $\mathcal{F}$ est un faisceau cohérent sur $p_{n+1,n}^{-1}(U)$ dont le support est inclus dans l'ensemble des point qui annulent T_{n+1}, il existe $d \in \mathbb{N}$ tel que $T_{n+1}^d \mathcal{F}_{(i,f)(x)} = 0$.

Dans la suite pour simplifier l'écriture du raisonnement que nous allons faire par récurrence, nous échangerons les variable T_{k+1} et T_{n+1} pour que l'image de x par la projection sur les $k+1$ premières variables soit $0_{x_k,k+1} \in \mathbb{A}_{\mathcal{A}}^{k+1}$ (le point correspondant à l'idéal T_{k+1} au-dessus de x_k). Ainsi, nous souhaitons maintenant montrer l'énoncé ci-dessus en remplaçant T_{n+1} par T_{k+1}.

Grâce à la proposition 5.11, on sait que quitte à remplacer $p_{n+1,n}^{-1}(U)$ par un voisinage U' plus petit de $(i,f)(x)$ dans $\mathbb{A}_{\mathcal{A}}^{n+1}$, on peut supposer qu'il existe un morphisme fini $\varphi : U \to V$ où V est un voisinage dans $\mathbb{A}_{\mathcal{A}}^{n+1}$ du point au-dessus de x_{k+1} correspondant à l'idéal engendré par $T_{k+2}, \cdots, T_n$ que l'on notera $0_{x_{k+1},n}$ tel que $\varphi^{-1}(\{0_{x_{k+1},n}\}) = \{x\}$, tel que $U_{k+1} := p_{n,k+1}(U) = p_{n,k+1}(V)$ et rendant le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "\varphi_x"] \arrow[d, "p_{n,k+1}"] & V \arrow[d, "p_{n,k+1}"] \\ U_{k+1} \arrow[r, "Id_{U_{k+1}}"] & U_{k+1} \end{tikzcd}$$

commutatif. Puisque φ est fini $\varphi_*(\mathcal{F})$ est un faisceau cohérent (voir proposition 5.8). De plus, du fait que φ soit l'identité sur les $k+1$ premières variables, le support de $\varphi_*(\mathcal{F})$ est inclus dans $\{T_{k+1} = 0\}$. Ainsi il suffit de montrer l'énoncé dans le cas où x est le point $0_{x_k,n}$, et f est la fonction T_{k+1}.

Enfin, dans le cas où $\mathcal{O}_{\mathbb{A}_{\mathcal{A}}^k, x_k}$ est un anneau fortement de valuation discrète, nous allons procéder à une autre réduction de l'énoncé. Dans ce cas il suffira de montrer l'énoncé suivant :

$$\text{il existe deux entiers } d \text{ et } v \text{ tel que } T_{k+1}^d \pi_{x_k}^v \mathcal{F}_x = 0.$$

En effet, puisque $\pi_{x_k}(\pi_{x_k}^{v-1} T_{k+1}^d \mathcal{F}_x) = 0$, le faisceau cohérent $\pi_{x_k}^{v-1} T_{k+1}^d \mathcal{F}$ est un faisceau cohérent sur le sous-espace analytique $\{y \in \mathbb{A}_{\mathcal{A}}^{k+1} |\ |\pi_{x_k}(y)| = 0\}$. Ce dernier espace est isomorphe à $\mathbb{A}_{\mathscr{H}(\pi(x))}^{k+1}$. Ainsi nous somme ramené au cas où $\mathcal{O}_{\mathbb{A}_{\mathscr{H}(\pi(x))}^k, x_k}$ est un corps fort déjà traité plus haut. Ceci nous permet d'affirmer qu'il existe un entier $d_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\pi_{x_k}^{v-1} T_{k+1}^{d+d_1} \mathcal{F}_x = 0$. Par une récurrence immédiate sur v on montre que quitte à prendre un $d \in \mathbb{N}$ suffisamment grand on a l'égalité $T_{k+1}^d \mathcal{F}_x = 0$.

Montrons maintenant l'énoncé dans le cas auquel nous nous sommes ramenés par récurrence sur $n-k$. La récurrence ne commençant que maintenant le fait que nous ayons augmenté la dimension dans l'étape préliminaire ne pose pas de problème de raisonnement.

Supposons d'abord que $n-k = 1$.

Soit V un voisinage spectralement convexe de x_k dans $\mathbb{A}^k_{\mathcal{A}}$. On identifiera $\mathbb{A}^1_{\mathcal{B}(V)}$ à un voisinage de x dans $\mathbb{A}^{k+1}_{\mathcal{A}}$. D'après l'hypothèse, le support de $\mathcal{F}$ est inclus dans le sous-espace analytique $\{y \in U | \ |T_{k+1}(y)| = 0\}$. Or cet espace analytique est d'intérieur vide dans $\mathbb{A}^{k+1}_{\mathcal{A}}$. Ainsi le support de $\mathcal{F}$ n'est pas un voisinage de x, donc il existe un germe non nul $g \in \mathcal{O}_{\mathbb{A}^{k+1}_{\mathcal{A}},x}$ tel que $g\mathcal{F}_x$ soit nul. D'après la description explicite de $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^{k+1}_{\mathcal{A}},x} \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{A}^1_{\mathcal{B}(V)},x}$ donnée dans le corollaire 2.5 de [Poi13], quitte à réduire V, on peut supposer que g peut sécrire sous la forme $T^d_{k+1}(\sum_{i\geq 0} \alpha_i T^i_{k+1})$ avec les α_i appartenant à $\mathcal{B}(V)$ et $\alpha_0 \neq 0$. On pose $\tilde{g} = \sum_{i\geq 0} \alpha_i T^i_{k+1}$.

Si $\alpha_0(x_k)$ est non nul, le germe $\tilde{g}$ est inversible dans $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^{k+1}_{\mathcal{A}},x}$ (ce sera toujours le cas lorsque $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^k_{\mathcal{A}},x_k}$ est un corps fort) et ainsi l'égalité :

$$g\mathcal{F}_x \simeq \left(\sum_{i\geq 0} \alpha_i T^i_{k+1}\right)(T^d_{k+1}\mathcal{F}_x) = 0$$

implique que $T^d_{k+1}\mathcal{F}_x = 0$.

Supposons maintenant que $\alpha_0(x_k) = 0$ et donc que $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^k_{\mathcal{A}},x_k}$ est un anneau fortement de valuation discrète. On note π_{x_k} l'uniformisante de $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^k_{\mathcal{A}},x_k}$. D'après le lemme 9.14 de [Poi13], il existe $v \in \mathbb{N}$ tel que $\tilde{g} = \pi^v_{x_k} h$ dans $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^1_{\mathscr{H}(x_k)},x}$ avec $h = \sum_{i\geq 0} \alpha'_i T^i_{k+1}$ non nul sur $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^1_{\mathscr{H}(x_k)},x}$. De plus, nous avons toujours l'égalité $g\mathcal{F} = h\pi^v_{x_k} T^d_{k+1}\mathcal{F}_x = 0$. Ainsi, quitte à rétrécir le voisinage U de x, on peut supposer que $\pi^v_{x_k} T^d_{k+1}\mathcal{F}$ est induit par un faisceau cohérent sur le sous-espace analytique défini par l'équation $h = 0$.

Si h est non nul en x alors cela implique que $\pi^v_{x_k} T^d_{k+1}\mathcal{F}_x = 0$ ce qui est l'égalité souhaitée dans le cas où $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^k_{\mathcal{A}},x_k}$ est un anneau fortement de valuation discrète. Nous nous placerons donc dans le cas où h est nul en x. De plus, le support de $\pi^v_{x_k} T^d_{k+1}\mathcal{F}$ est inclus dans l'ensemble :

$$\begin{aligned}\left\{\textstyle\sum_{i\geq 0} \alpha'_i T^i_{k+1} = h = 0\right\} \cap \{T_{k+1} = 0\} &= \{\alpha'_0 = 0\} \cap \{T_{k+1} = 0\} \\ &= \{\pi_{x_k} = 0\} \cap \{T_{k+1} = 0\},\end{aligned}$$

la dernière égalité étant vraie puisque $\alpha'_0(x_k) = h(x) = 0$, et ainsi α'_0 n'est pas inversible dans l'anneau de valuation discrète $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^k_{\mathcal{A}},x_k}$. Le support de $\pi^v_{x_k} T^d_{k+1}\mathcal{F}$ est donc inclus dans $\{\pi_{x_k} = 0\}$. Nous souhaitons en déduire que quitte à prendre v plus grand cela implique que $\pi^v_{x_k} T^d_{k+1}\mathcal{F}$ est nul.

Pour cela, on remarque que puisque h n'est pas identiquement nulle lorsqu'elle est restreinte à $p^{-1}_{k+1,k}(\{x_k\})$, quitte à restreindre U, on peut supposer que l'ensemble des zéros de h dans $\mathbb{A}^1_{\mathscr{H}(x_k)} \cap U$ est réduit à $\{x\}$. Ainsi, quitte à réduire de nouveau U, on peut supposer que la restriction de la projection de naturelle

$$p_{k+1,k} : \{y \in U | \ |h(y)| = 0\} \to V$$

est un morphisme fini sur un voisinage V' de x_k dans V par la proposition 5.9. Le faisceau $(p_{k+1,k})_*(\pi^v_{x_k} T^d_{k+1}\mathcal{F})$ est alors un faisceau cohérent sur V'.

Puisque le support de $\pi_{x_k}^v T_{k+1}^d \mathcal{F}$ est donc inclus dans $\{\pi_{x_k} = 0\}$, il en est de même du support de $(p_{k+1,k})_*(\pi_{x_k}^v T_{k+1}^d \mathcal{F})$ ce qui implique par la première partie qu'il existe $v' \in \mathbb{N}$ tel que $\pi_{x_k}^{v'}(p_{k+1,k})_*(\pi_{x_k}^v T_{k+1}^d \mathcal{F})_{x_k} \simeq (p_{k+1,k})_*(\pi_{x_k}^{v+v'} T_{k+1}^d \mathcal{F})_{x_k} = 0$. On en conclut donc que quitte à augmenter v, on peut affirmer que $\pi_{x_k}^v T_{k+1}^d \mathcal{F}_x = 0$.

Supposons maintenant que nous ayons démontré l'énnoncé de la récurrence pour tout entier $n-k$ inférieur ou égale à un i donné. Soit $x \in \mathbb{A}_{\mathcal{A}}^n$ tel que x_k soit purement localement transcendant au-dessus de $\pi(x)$, et tel que x soit le point correspondant à l'idéal $T_{k+1}, \cdots, T_n$ au-dessus de x_k avec $n-k = i+1$. Puisque le support du faisceau $\mathcal{F}$ est inclus dans l'ensemble analytique $\{y \in U| \, |T_{k+1}(y)| = 0\}$ (qui est un ensemble d'intérieur vide), il existe $g \in \mathcal{O}_{\mathbb{A}_{\mathcal{A}}^n, x}$ non nulle tel que $g\mathcal{F}_x = 0$.

Nous allons commencer par nous ramener au cas où g est non nul une fois restreint à $p_{n,k}^{-1}(\{x_k\}) \simeq \mathbb{A}_{\mathscr{H}(x_k)}^{n-k}$ et $g(x) = 0$.

Dans le cas où x_k est un point tel que $\mathcal{O}_{\mathbb{A}_{\mathcal{A}}^k, x_k}$ est un corps fort, la proposition 5.6 assure que la restriction de g à $p_{n,k}^{-1}(\{x_k\})$ est non nulle.

Dans le cas où x_k est un point tel que $\mathcal{O}_{\mathbb{A}_{\mathcal{A}}^k, x_k}$ est un anneau fortement de valuation discrète, le Lemme 9.14 de [Poi13] assure qu'il existe $h \in \mathcal{O}_{\mathbb{A}_{\mathcal{A}}^n, x}$ non nul une fois restreinte à $p_{n,k}^{-1}(\{x_k\})$ et $v \in \mathbb{N}$ tel que $g = \pi_{x_k}^v h$ où π_{x_k} est l'uniformisante de $\mathcal{O}_{B,\pi(x)}$. Ainsi, on a l'égalité $h(\pi_{x_k}^v \mathcal{F}_x) = 0$, c'est-à-dire que quitte à réduire U on peut voir $\pi_{x_k}^v \mathcal{F}$ comme un faisceau cohérent sur le sous-espace analytique de U, $\{y \in U| \, |h(y)| = 0\}$. Ainsi quitte à remplacer g par h et $\mathcal{F}$ par $\pi_{x_k}^v \mathcal{F}$ (ce que l'on peut faire puisque nous cherchons à montrer dans ce cas qu'il existe d et v tel que $\pi_{x_k}^v T_{k+1}^d \mathcal{F}_x = 0$), nous pouvons supposer que nous sommes dans le cas où la restriction de g à $p_{n,k}^{-1}(\{x_k\})$ est non nulle.

Puisque nous sommes maintenant dans le cas où g est non nul une fois restreint à $\mathbb{A}_{\mathscr{H}(x_k)}^{n-k}$, nous pouvons appliquer le lemme 3.15. Il existe un $n-k-1$-uplet d'entiers $(u_{k+1}, \ldots, u_{n-1})$ tel que le morphisme $\psi_{u_{k+1},\ldots,u_{n-1}}$ correspondant au changement de variable

$$\left\{ \begin{array}{rcl} T_1 & \mapsto & T_1, \\ & \vdots & \\ T_k & \mapsto & T_k, \\ T_k & \mapsto & T_k + T_n^{u_k}, \\ & \vdots & \\ T_{n-1} & \mapsto & T_{n-1} + T_n^{u_{n-1}}, \\ T_n & \mapsto & T_n, \end{array} \right. .$$

en g sur une fonction $\psi_{u_{k+1},\ldots,u_{n-1}}^{\#}(g)$ non nulle une fois restreinte à un voisinage de x dans $\mathbb{A}_{\mathscr{H}(x_{n-1})}^1$. Qui plus est l'isomorphisme $\psi_{u_{k+1},\ldots,u_{n-1}}^{\#}(g)(\psi_{u_{k+1},\ldots,u_{n-1}})_*(\mathcal{F})_x \simeq g\mathcal{F}_x$ permet d'affirmer que nous nous sommes ramené au cas où g est non nul une fois restreint à restreinte à un voisinage de x dans $\mathbb{A}_{\mathscr{H}(x_{n-1})}^1$.

Ainsi, quitte à prendre U suffisamment petit, on peut supposer que x_{n-1} n'admet qu'un seul antécédant par la restriction de la projection sur les $n-1$ premières variables $p_{n,n-1} : \{y \in U| \, |h(y)| = 0\} \to \mathbb{A}_{\mathcal{A}}^{n-1}$. Nous pouvons alors utiliser la proposition 5.9

pour affirmer que quitte à rétrécir U, il existe un voisinage V' de x_{n-1} dans $\mathbb{A}_{\mathcal{A}}^{n-1}$ tel que le morphisme $p_{n,n-1} : \{y \in U|\ |h(y)| = 0\} \to V'$ soit fini. Ainsi $p_{n,n-1*}(\mathcal{F})$ est un faisceau cohérent de V' dont le support est inclus dans $\{y \in \mathbb{A}_{\mathcal{A}}^{n-1}|\ |T_{k+1}(y)| = 0\}$. ce qui nous permet de dire par hypothèse de récurrence qu'il existe $d \in \mathbb{N}$ tel que $T_{k+1}^d \mathcal{F}_x = 0$. □

5.5 Propriétés topologiques des morphisme finis et plats

Nous allons maintenant nous servir des résultats obtenus dans les deux premières sections de ce chapitre pour montrer que certains types de morphisme d'espaces analytiques sont ouvert. Le résultat suivant est un analogue d'un résultat d'analyse complexe (voir 3.3.2. Criterion of Openness [GR84]).

Commençons par définir la notion d'espace réduit.

Définition 5.14. Soient $(X, \mathcal{O}_X)$ un espace analytique et $x \in X$, on dit que $(X, \mathcal{O}_X)$ est **réduit en** x si $\mathcal{O}_{X,x}$ est un anneau réduit. On dit de plus que $(X, \mathcal{O}_X)$ est **réduit** s'il est réduit en tout point de $x \in X$.

On peut d'ores et déjà remarquer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, le théorème 1.29 assure que l'espace analytique $(\mathbb{A}_{\mathcal{A}}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{A}_{\mathcal{A}}^n})$ est réduit.

Proposition 5.15. *Soit $\varphi : X \to Y$ un morphisme fini d'espaces $\mathcal{A}$-analytiques tel que Y est réduit et tel que pour tout $y \in Y$, $\varphi_*(\mathcal{O}_X)_y$ est $\mathcal{O}_{Y,y}$-module sans torsion.*

Sous ces conditions, le morphisme φ est ouvert.

Démonstration de la proposition. Soit $x \in X$ et U un voisinage de x. On pose $x_1 = x$ et $\varphi^{-1}(\varphi(x)) = \{x_1, \cdots, x_n\}$. Puisque φ est finie, il existe un voisinage V de $\varphi(x)$ tel que $\varphi^{-1}(V)$ soit une union disjointe $\coprod_{i=1}^n U_i$ et tel que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ x_i appartienne à U_i et $U_1 \subset U$. Le morphisme $\varphi_{U_1,V} : U_1 \to V$ est encore un morphisme fini. Ainsi, d'après la proposition 5.8 le $\mathcal{O}_V$-module $\mathcal{F} := (\varphi_{U_1,V})_* \mathcal{O}_{U_1}$ est un faisceau cohérent sur V.

Pour montrer que φ est ouvert en x, il suffit de montrer que $\varphi_{U_1,V}$ est ouvert en x. Qui plus est, par finitude de φ, le module $\mathcal{F}_{\varphi(x)}$ est un sommant de $(\varphi)_*(\mathcal{O}_X)_{\varphi(x)}$ ce dernier étant isomorphe à $\left(\sum_{i=1}^n (\varphi_{(U_i,V)})_*(\mathcal{O}_{U_i})_{\varphi(x)}\right)$. Ainsi $\mathcal{F}_{\varphi(x)}$ est aussi un $\mathcal{O}_{Y,\varphi(x)}$-module sans torsion.

Puisque $\varphi_{U_1,V}$ est fini, on a *supp*$(\mathcal{F}) = \varphi_{U_1,V}(U_1)$. Cela nous permet d'affirmer que l'ensemble $\varphi_{U_1,V}(U_1)$ est sous-jacent à un sous-espace analytique de V. Supposons que les germes de $\varphi_{U_1,V}(U_1)$ et de V en $\varphi(x)$ diffèrent, alors il existe un germe de fonction non nul $f \in \mathcal{O}_{V,\varphi(x)}$ tel que f soit nulle sur $\varphi_{U_1,V}(U_1)$.

La proposition 5.13, assure qu'il existe $t \in \mathbb{N}$ tel que $f^t \mathcal{F}_{\varphi(x)} = 0$ avec $f^t \neq 0$ car Y est réduit.

Ainsi $\mathcal{F}_{\varphi(x)}$ est de torsion ce qui est absurde. Nous avons bien montré que $\varphi(U)$ est un voisinage de $\varphi(x)$. □

Définition 5.16. Soit $\varphi : X \to Y$ un morphisme d'espaces analytiques. Nous dirons que φ est **plat** si pour tout $y \in Y$, le morphisme $\varphi^\# : \mathcal{O}_{Y,y} \to \varphi_*(\mathcal{O}_X)_y$ est plat en tant que morphisme d'anneaux.

La proposition précédente nous sera notamment très utile dans le cas particulier suivant :

Corollaire 5.17. *Soit $\varphi : X \to Y$ un morphisme d'espaces analytiques fini et plat avec Y réduit. Le morphisme φ est ouvert.*

En particulier, d'après le Théorème 8.8 [Poi13], pour tout ouvert U de $\mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}$ et polynôme P à coefficients dans $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}}(U)$, le morphisme $\varphi_P : p^{-1}_{n+1,n}(U) \to p^{-1}_{n+1,n}(U)$ est ouvert.

Démonstration du corollaire. Il suffit de remarquer que puisque φ est plat, pour tout point $y \in Y$, $\varphi_*(\mathcal{O}_X)_y$ est un $\mathcal{O}_{Y,y}$-module libre et donc en particulier sans torsion. On conclut alors grâce à la proposition 5.15. □

Pour pouvoir utiliser le corolaire précédent nous aurons besoin de la propriété suivante :

Proposition 5.18. *La classe des morphismes finis et plats est stable par changement de base dans la catégorie $\mathcal{A} - An$.*

Démonstration de la proposition. Soient $\varphi : X \to Y$ un morphisme fini et plat, $\psi : Z \to Y$ un morphisme au-dessus d'un morphisme d'algèbres de Banache $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ et z un point de Z. On note φ' le changement de base de φ par ψ et ψ' le changement de base de ψ par φ. La proposition 5.10 assure que le morphisme φ' est un morphisme fini. Il nous faut montrer que le $\mathcal{O}_{Z,z}$-module $\varphi'_*(\mathcal{O}_{X\times_Y Z})_z$ est plat. Puisque φ' est un morphisme fini le $\mathcal{O}_{Z,z}$-module $\varphi'_*(\mathcal{O}_{X\times_Y Z})_z$ est de type fini. Il suffit donc de montrer que $\varphi'_*(\mathcal{O}_{X\times_Y Z})_z$ est un $\mathcal{O}_{Z,z}$-module libre.

Puisque φ est fini et plat, pour tout $y \in Y$, le $\mathcal{O}_{Y,y}$-module $\varphi_*(\mathcal{O}_X)_y$ est libre. Grâce à la proposition 5.12 nous savons que le morphisme naturel suivant

$$\varphi_*(\mathcal{O}_X)_{\psi(z)} \otimes_{\mathcal{O}_{Y,\psi(z)}} \mathcal{O}_{Z,z} \simeq \psi^*(\varphi_*(\mathcal{O}_X))_z \to \varphi'_*(\psi'^*(\mathcal{O}_X))_z \simeq \varphi'_*(\mathcal{O}_{X\times_Y Z})_z$$

est un isomorphisme. Or le module de gauche est un $\mathcal{O}_{Z,z}$-module libre de type fini. Il en est donc de même de $\varphi'_*(\mathcal{O}_{X\times_Y Z})_z$. Ce qui assure qu'il est plat. □

Soit $x \in \mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}$. Quitte à permuter les variables, on peut supposer qu'il existe $k \in [\![0, n]\!]$ tel que x_k soit purement localement transcendant au-dessus de $\pi(x)$ et tel que x soit rigide épais au-dessus de x_k. Nous allons pouvoir raffiner la proposition 5.11.

Proposition 5.19. *Soit $x \in \mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}$. On note x_k la projection sur les k premières variables de x et $0_{x_k,n}$ le point rigide épais au-dessus x_k correspondant à l'idéal $(T_{k+1}, \ldots, T_n)$.*

Nous pouvons choisir le morphisme fini φ_x tel que $\varphi_x^{-1}(\{0_{x_k,n}\}) = \{x\}$ de la proposition 5.11 de telle sorte qu'il soit ouvert.

Démonstration de la proposition. Pour montrer que ce morphisme est ouvert, il suffit de reprendre la démonstration de la proposition 5.11. En effet, les morphismes $\varphi_{\tilde{P}_n}$ que nous construisons sont finis et plats. Or la proposition 5.18 assure que le morphisme construit φ_x est fini et plat comme composé de morphismes qui sont des changement de base de morphismes finis et plats. Ainsi φ_x est fini et ouvert grâce à la Proposition 5.15. □

5.6 Interlude de topologie générale

Dans cette section nous faisons un petit aparté sur quelques résultats de topologie générale qui vont nous être utiles pour montrer que les espaces affines (puis ensuite les espaces analytiques quelconques) sur un anneau d'entiers de corps de nombres sont localement connexes par arcs.

Commençons par montrer un résultat de modération du nombre de composantes connexes.

Proposition 5.20. *Soit X un espace topologique. S'il existe une application continue finie, ouverte $f : X \to Y$, où Y est un espace topologique connexe, l'espace topologique X n'a qu'un nombre fini de composantes connexes.*

Démonstration de la proposition. Soit $x \in X$, on note $\mathcal{OF}_x$ l'ensemble des ouverts, fermés de X qui contiennent x et $OF_x := \bigcap_{U \in \mathcal{OF}_x} U$. Commençons par prouver que nous avons l'égalité $\bigcap_{U \in \mathcal{OF}_x} f(U) = f(OF_x)$.

Il suffit de montrer que $\bigcap_{U \in \mathcal{OF}_x} f(U)$ est inclus dans $f(OF_x)$ (l'autre inclusion étant évidente). Soit $y \in \bigcap_{U \in \mathcal{OF}_x} f(U)$, il faut montrer que $f^{-1}(\{y\}) \cap (OF_x)$ n'est pas vide.

On pose $\{x_1, \cdots, x_n\}$, l'ensemble fini $f^{-1}(\{y\})$. Supposons que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, il existe $U_i \in \mathcal{OF}_x$ tel que $x_i \notin U_i$. On a ainsi $(\bigcap_{i=1}^n U_i) \cap f^{-1}(\{y\}) = \varnothing$. Mais toute intersection finie d'ouverts fermés est encore un ouvert et fermé donc $\bigcap_{i=1}^n U_i$ appartient à $\mathcal{OF}_x$ ce qui est absurde car y appartient à $\bigcap_{U \in \mathcal{OF}_x} f(U)$. Ainsi, il existe $i \in [\![1, n]\!]$ tel que pour tout $U \in \mathcal{OF}_x$, x_i appartient à U, et donc y appartient à $f(OF_x)$.

Puisque Y est connexe et puisque pour tout $U \in \mathcal{OF}_x$, $f(U)$ est ouvert et fermé, on a $f(U) = Y$. Ainsi, par ce qui précède pour tout $x \in X$, $f(OF_x) = Y$.

Maintenant, montrons que les ensembles OF_x forment une partition de X. Pour montrer cela il faut de montrer que si x' n'appartient pas à OF_x, alors $OF_x \cap OF_{x'} = \varnothing$ et si x' appartient à OF_x alors $OF_x = OF_{x'}$.

Si x' n'appartient pas à OF_x, alors il existe un ouvert fermé U contenant x tel que x' n'appartienne pas à U. Dans ce cas $X \backslash U$ est un ouvert fermé qui contient x' et ne contient pas x. Ainsi $OF_x \cap OF_{x'} = (OF_x \cap U) \cap (OF_{x'} \cap (X \backslash U)) = \varnothing$.

Si x' appartient à OF_x, alors tout ouvert fermé qui contient x contient x' donc $OF_{x'}$ est inclus dans OF_x. Cela implique par ce qui précède que x appartient à $OF_{x'}$ et donc que OF_x est égale à $OF_{x'}$.

De plus, pour tout $x \in X$, $f(OF_x) = Y$. Ainsi, il existe $i \in [\![1, n]\!]$ tel que x_i appartient à OF_x ce qui implique que $OF_x = OF_{x_i}$. On en déduit alors l'égalité $\cup_{i=1}^n OF_{x_i} = X$.

Les OF_{x_i} sont fermés, comme intersections de fermés, et puisqu'ils sont en nombre fini, ils sont aussi ouverts comme intersections finies d'ouverts. Cela implique que chacun des OF_{x_i} est connexe. □

Nous souhaiterions avoir un résultat analogue au précédent mais cette fois-ci concernant la connexité par arcs. Pour cela, nous aurons besoin de propriétés plus fortes sur l'espace d'arrivée. La définition suivante va nous donner une classe d'espaces topologiques ayant des propriétés suffisantes pour démontrer l'énoncé souhaité.

Définition 5.21. Soit X un espace topologique. Nous dirons qu'il admet une structure d'espace **élastique** ou juste qu'il est élastique s'il est séparé et s'il existe $x_0 \in X$ tel que pour tout $x \in X \backslash \{x_0\}$, il existe un chemin ℓ_x reliant x à x_0. Ce chemin doit, de plus, vérifier la propriété que pour tout voisinage U de ℓ_x, il existe un voisinage V de x tel que pour tout $x' \in V$ il existe un chemin de x' à x_0 inclus dans U.

Remarque 5.22.
- Soient X un espace élastique et $x_0' \in X \backslash \{x_0\}$, on peut remplacer dans la définition de X, x_0 par x_0'. En effet, il existe un chemin ℓ reliant x_0 à x_0', pour chaque $x \in X$ il suffit de remplacer ℓ_x par la concaténation de ℓ_x avec ℓ.
- Soit X un espace topologique. De la remarque précédent nous pouvons déduire une autre définition d'espace élastique.

  Il est équivalent de dire que X est élastique ou que pour tout couple x et y, il existe un chemin $\ell_{x,y}$ reliant x à y tel que pour tout voisinage V de $\ell_{x,y}$, il existe un voisinage de U de x dans V tel que pour tout point $z \in U$ il existe un chemin reliant z à y dans V.

Exemple 5.23. Nous allons donner quelques exemples et un contre exemple pour se faire une meilleure idée de ce qu'est un espace élastique.
- Tout espace non vide, connexe, localement connexe par arcs et séparé est élastique. De même tout espace séparé et contractile est aussi élastique. Cependant, puisqu'il existe des espaces contractiles séparés mais non localement connexes par arcs et réciproquement des espaces connexes, localement connexes par arcs et séparés mais non contractiles, la notion d'espace élastique est une notion plus générale.
- Nous allons donner un exemple qui montre que la notion d'espace élastique n'est pas équivalente à la notion d'espace connexe par arcs. On note $G_{\sin(1/x)}$ le sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ constitué du graphe de $\sin(1/x)$ sur $]0, 1/\pi]$. Nous allons considérer l'espace topologique X constitué de la réunion de l'adhérence de $G_{\sin(1/x)}$ dans $\mathbb{R}^2$ et d'un chemin reliant le point $(0, -1)$ au point $(1/\pi, 0)$ (de telle sorte que ce chemin n'intersecte $\overline{G_{\sin(1/x)}}$ qu'en $(0, -1)$ et $(1/\pi, 0)$) (voir figure 5.1 ci-dessous).

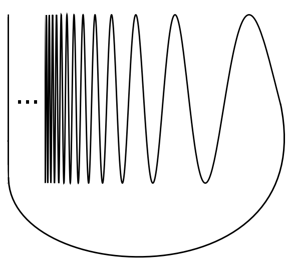

Figure 5.1 – Exemple d'espace non élastique mais connexe par arcs.

Cet espace topologique est connexe par arcs. Cependant, si l'on note x_0 le point de coordonné $(1/\pi, 0)$, il n'y a qu'un chemin reliant un point x de $\overline{G_{\sin(1/x)}} \backslash G_{\sin(1/x)}$ à x_0. Tout voisinage V de x contient un point y de $G_{\sin(1/x)}$. Mais y ne peut être relié à x_0 que par un unique chemin inclus dans $G_{\sin(1/x)}$. Ainsi, clairement, il existe un voisinage W du chemin reliant x à x_0 (voir figure 2 ci-dessous) tel que pour tout voisinage V de x dans W il existe un point $y \in V \cap G_{\sin(1/x)}$ ne pouvant être relié à x_0 par un chemin inclus dans W.

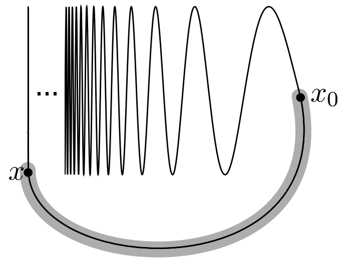

Figure 5.2 – Un voisinage d'un chemin.

Cet espace topologique n'est donc pas élastique.

La proposition suivante provient de [Ber90] (lemme 3.2.5.), nous en rappelons ici la démonstration pour y apporter quelques précisions.

Proposition 5.24. *Soit $\varphi : Y \to X$ une application finie, ouverte entre espaces topologiques connexes avec Y séparé et X élastique. Alors l'espace topologique Y est connexe par arcs.*

Avant de donner une démonstration de cette propriété, nous allons donner un exemple de revêtement de degré 2 d'un espace topologique connexe par arcs (mais non élastique) qui est connexe mais non connexe par arcs. Cela permet de justifier l'introduction de la définition d'espaces élastiques.

Exemple 5.25. Nous reprenons les notations du deuxième exemple de 5.23. L'espace topologique Y suivant :

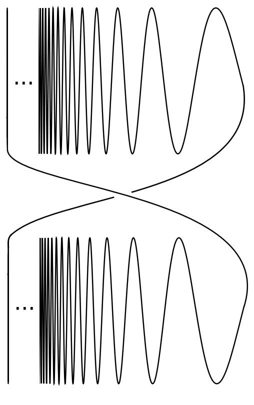

Figure 5.3 – Revêtement de degré 2 non connexe par arcs d'un espace non élastique (mais connexe par arcs).

est clairement un revêtement de degré deux de X. Cependant, il est connexe et il a manifestement deux composantes connexes par arcs.

Démonstration de la proposition. Il suffit de montrer que les composantes connexes par arcs de Y sont ouvertes.

Soient x_0 un point de X, $y \in Y$ et $x = \varphi(y)$. Soit ℓ un chemin reliant x à x_0. La restriction $\varphi : \varphi^{-1}(\ell) \to \ell$ est à nouveau un morphisme fini ouvert. Par la proposition 5.20, $\varphi^{-1}(\ell)$ a un nombre fini de composantes connexes (et la restriction de f à chacune de ses composantes connexes est surjective sur ℓ). Nous allons même montrer que cet ensemble est localement connexe.

Soient $z \in \varphi^{-1}(\ell)$ et V un voisinage de z dans $\varphi^{-1}(\ell)$. Montrons que z admet un voisinage connexe dans V. Puisque φ est finie et Y est séparé, quitte à réduire V, on peut supposer que $\varphi^{-1}(\varphi(V)) = V \coprod V'$ avec V' ouvert disjoint de V et que $\varphi(V) \subset \ell$ est connexe. Ainsi l'application restreinte $\varphi : V \to \varphi(V)$ est encore finie et ouverte. Ceci nous permet à nouveau d'affirmer que V n'a qu'un nombre fini de composantes connexes, donc quitte à réduire encore V, on peut le supposer connexe.

Maintenant, puisque $\varphi^{-1}(\ell)$ est compact et possède une base dénombrable de voisinages, il est métrisable (voir Théorème 4.2.8. de [Eng77] ou proposition 16 IX de [Bou98]). De plus, on sait que les espaces topologiques compacts, localement connexes et métrisables sont localement connexes par arcs (voir le point 6.3.11. de [Eng77] ou 2.2 proposition 2 de [DH84]). On note Σ la composante connexe de $\varphi^{-1}(\ell)$ contenant y. Cet ensemble est localement connexe par arcs et connexe donc en particulier il est connexe par arcs.

Intéressons nous maintenant au cas de ℓ_x un chemin reliant x à x_0 satisfaisant la propriété requise par les espaces élastiques. On pose $\Sigma = \Sigma_1, \cdots, \Sigma_n$ les composantes connexes de $\varphi^{-1}(\ell_x)$. Notons aussi, $W_1, \cdots, W_n$ des voisinages de $\Sigma_1, \cdots, \Sigma_n$ tels que l'intersection $W_i \cap W_j$ soit vide si i est différent de j. En utilisant une fois de plus le caractère séparé de Y et le fait que φ est finie, on montre qu'il existe un voisinage U de ℓ_x tel que $\varphi^{-1}(U) \subset \bigcup_{i=1}^n W_i$.

Soit V un voisinage ouvert de x tel que pour tout $x' \in V$, il existe un chemin reliant x' à x_0 dans U. Nous pouvons maintenant affirmer que $\varphi^{-1}(V) \cap W_1$ est inclus dans la composante connexe par arcs de y.

En effet, soit $y' \in \varphi^{-1}(V) \cap W_1$. On pose $x' = \varphi(y')$. Puisque x' appartient à V, il existe ℓ reliant x' à x_0 inclus dans U. On note Σ' la composante connexe de $\varphi^{-1}(\ell)$ contenant y'. Puisque Σ et Σ' sont connexes par arcs et qu'ils sont d'intersection non vide (ils contiennent un point commun de $\varphi^{-1}(x_0)$), il existe un chemin reliant y à y' dans W. □

Pour montrer que certain espaces topologiques sont élastiques, nous allons donner deux critères.

Proposition 5.26. *Soient X un espace topologique séparé et U un ouvert de X.*

Supposons que :

1. *U et $F := X\backslash U$ sont élastiques ;*

2. *l'ensemble $\partial F := F \backslash \mathring{F}$ est non vide ;*
3. *tout point x appartenant à ∂F admet une base de voisinages $\mathcal{V}_x$ dans X telle que pour tout $V \in \mathcal{V}_x$ et tout point $y \in U \cap V$, il existe un chemin tracé sur V reliant y à un point de F.*

L'espace topologique X est alors élastique.

Démonstration de la proposition. Soient x_0 un point de X appartenant à ∂F et y_0 un point de U.

Dans un premier temps remarquons que les hypothèses sur X assurent qu'il est connexe par arcs. En effet, soit x et y dans X. Si x et y sont tous les deux inclus dans U ou tous les deux inclus dans F du fait que ces deux espaces topologiques admettent une structure d'espace élastique, il existe un chemin reliant x à y dans X. Supposons maintenant que y appartienne à U et x à F. Soit V un voisinage de x_0 appartenant à $\mathcal{V}_{x_0}$. Il existe y' appartenant à $V \cap U$ et un chemin (inclus dans V) reliant y' à un point x' de $V \cap F$. Or puisque F et U admettent une structure d'espace élastique, il existe un chemin reliant x à x' et un chemin reliant y à y'. Ainsi par concaténation, il existe un chemin reliant x à y.

Nous allons maintenant procéder à la construction d'une structure d'espace élastique sur X.

Commençons par définir le chemin ℓ_x reliant x à x_0.

- Soit $x \in U$. On note ℓ'_x un chemin reliant x à y_0 satisfaisant les axiomes d'une structure d'espace élastique sur U. Puisque X est connexe par arcs, il existe un chemin reliant y_0 à x_0. On note ℓ_x la concaténation de ℓ'_x et d'un chemin reliant y_0 à x_0.
- Soit $x \in F$. On note ℓ_x un chemin reliant x à x_0 satisfaisant les axiomes d'une structure d'espace élastique sur F.

Montrons maintenant que les chemins $(\ell_x)_{x\in X}$ donnent à X une structure d'espace élastique.

Soient $x \in X$ et W un voisinage de ℓ_x dans X. Si x appartient à U ou $\mathring{F}$, par choix de ℓ_x, il existe un voisinage W' de x dans X tel que pour tout point $y \in W'$, il existe un chemin reliant y à x_0 dans W. Supposons que x appartienne à $X \backslash (U \cup \mathring{F}) = \partial F$. Le point x admet un voisinage W' dans X tel que pour tout $y \in W' \cap F$, il existe un chemin reliant y à x_0 dans W. Soient V un voisinage de x dans W' appartenant à $\mathcal{V}_{x_0}$ et $y \in V \cap U$. Il existe un chemin dans V reliant y à un point x' de $V \cap F$. Ainsi, il existe un chemin reliant y à x_0 inclus dans W. □

Proposition 5.27. *Soient X un espace topologique séparé et $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite croissante (pour l'inclusion) de sous-espaces topologiques non vides tel que $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} \mathring{X}_i = X$. Si pour tout $i \in \mathbb{N}$ l'espace topologique X_i est élastique, alors l'espace topologique X est lui aussi élastique.*

Démonstration de la proposition. Soient $x_0 \in X_0$ et $x \in X$. Par hypothèse, il existe un $i \in \mathbb{N}$ tel que x appartienne à $\mathring{X}_i$. Soit ℓ_x un chemin reliant x à x_0 dans X_i satisfaisant les axiomes des espaces élastiques et V un voisinage de ℓ_x dans X. Par hypothèse, il existe un voisinage V' de x dans $V \cap X_i$ tel que tout point y de V' puisse être relié à x_0 par un chemin inclus dans V. Mais puisque $V \cap X_i$ est un voisinage de x dans X, il en est de même de V'. Ainsi ℓ_x satisfait les axiomes des espaces élastiques dans X et ce dernier est donc élastique. $\square$

5.7 Connexité locale par arcs des espaces affines au-dessus d'un anneau d'entiers de corps de nombres

Nous allons maintenant pouvoir montrer que tout espace affine sur un anneau d'entiers de corps de nombres est localement connexe par arcs.

Dans cette section nous supposerons que $\mathcal{A}$ est soit un anneau d'entiers de corps de nombres muni de la norme usuelle ou de la norme triviale, soit un corps. On rappelle que ce que l'on appelle la norme usuelle sur $\mathcal{A}$ est la norme définie de la façon suivante :

$$\begin{array}{rccc} \|.\| : & \mathcal{A} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \max_\sigma |\sigma(x)|_{\mathbb{C}} \end{array}$$

où σ parcourt l'ensemble des plongements de $\mathcal{A}$ dans le corps des complexes, et la norme $|.|_{\mathbb{C}}$ est la norme usuelle sur le corps des complexes.

Notons que, dans ces cas, le spectre analytique $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ est connexe, localement connexe par arcs (voir la partie 3.1.1 de [Poi10] et plus précisément le Théorème 3.1.13 pour le cas d'un anneau d'entiers de corps de nombres).

Commençons par remarquer un fait qui nous sera utile par la suite. Soit $\mathcal{A}$ un anneau d'entiers de corps de nombres muni de la norme usuelle. On note $\mathcal{A}_{triv}$ l'anneau d'entiers de corps de nombres muni de la norme triviale. Le morphisme naturel d'algèbres de Banach $\mathcal{A} \to \mathcal{A}_{triv}$ induit un morphisme $\mathbb{A}^n_{\mathcal{A}_{triv}} \to \mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ce morphisme induit une identification entre $(\mathbb{A}^n_{\mathcal{A}})_{um}$ et $\mathbb{A}^n_{\mathcal{A}_{triv}}$. Cela provient du fait que toute semi-norme ultramétrique sur $\mathcal{A}[T_1, \dots, T_n]$, est bornée par la norme triviale sur $\mathcal{A}$ une fois restreinte à $\mathcal{A}$ et ainsi qu'elle corresponde à un unique point de $\mathbb{A}^n_{\mathcal{A}_{triv}}$. De même, toute semi-norme sur $\mathcal{A}[T_1, \dots, T_n]$ bornée par la norme triviale une fois restreinte à $\mathcal{A}$ est une semi-norme ultramétrique.

Considérons maintenant un anneau d'entiers de corps de nombres $\mathcal{A}$ muni de sa norme usuelle. Il y a une bijection naturelle entre les plongements de $\mathcal{A}$ dans $\mathbb{C}$ et les composantes connexes de $\mathcal{M}(\mathcal{A}) \backslash \mathcal{M}(\mathcal{A})_{um}$. De plus, chaque composante connexe de $\mathcal{M}(\mathcal{A}) \backslash \mathcal{M}(\mathcal{A})_{um}$ est homéomorphe à $]0, 1]$ (c'est une conséquence du Corollaire 3.1.12 de [Poi10]).

Soient b un point de $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ tel que $\mathscr{H}(b)$ soit non archimédien et $x \in \mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}$ un point au-dessus de b. On rappelle que $\eta_{x,0,r}$ est la semi-norme multiplicative au-dessus de x qui à tout polynôme $P := \sum_{i=0}^d a_i T^i \in \mathscr{H}(b)[T]$ associe $\max_i |a_i(x)| r^i$.

Pour les besoins des démonstrations qui vont suivre nous aurons besoin d'introduire une nouvelle notation. Soit $\mathbf{r} := (r_1, \dots, r_n)$ un n-uplet de réels positifs. Nous noterons $\eta_{b,0,\mathbf{r}}$ le point de $\mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}$ au-dessus de b, construit par récurrence de la manière suivante :

— si $n = 0$, on pose $\eta_{b,0,\mathbf{r}} = b$;

— si nous avons construit $\eta_{b,0,(r_1,\ldots,r_n)}$, on définit $\eta_{b,0,(r_1,\ldots,r_{n+1})}$ comme étant égal à $\eta_{\eta_{b,0,(r_1,\ldots,r_n)},0,r_{n+1}}$.

Soit $\mathbf{s} := (s_1, \ldots, s_n)$ et $\mathbf{t} := (t_1, \ldots, t_n)$ deux n-uplets de réels positifs tel que quelque que soit $i \in [\![1, n]\!]$, $s_i < t_i$. Nous allons maintenant construire une section continue du morphisme $\pi : D_U(\mathbf{s}, \mathbf{t}) \to U$:

Soit $\mathbf{r}$ un n-uplet de réels positifs tels que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $s_i \prec r_i < t_i$. On demande de plus que la famille formée des r_i non nulle soit libre dans $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{R}_+^*)$.

On définit l'application :

$$\begin{array}{cccc} \sigma : & U & \to & D_U(\mathbf{s}, \mathbf{t}) \\ & b & \mapsto & \begin{cases} \eta_{b,0,\mathbf{r}} & \text{si } b \in U_{um} \\ \mathbf{r}^{1/\epsilon} & \text{si } (\mathscr{H}(b), |\cdot|_b) = (\mathbb{K}, |\cdot|_\infty^\epsilon) \end{cases} \end{array}$$

où $\mathbb{K}$ est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ selon la semi norme b et $\mathbf{r}^{1/\epsilon} := (r_1^{1/\epsilon}, \ldots, r_n^{1/\epsilon}) \in \mathbb{C}^n$. Cette application est continue comme démontré dans le Lemme 2.4.4 de [Poi10] (c'est à ce moment que nous nous servons du fait que $\mathcal{A}$ est un anneau d'entiers de corps de nombres ou un corps).

Pour la suite et dans un souci de concision nous allons modifier le sens de la notation $D_U(\mathbf{s}, \mathbf{t})$.

Soit $U \subset \mathcal{M}(\mathcal{A})$. Soient, de plus, $\mathbf{s} := (s_1, \ldots, s_n)$ et $\mathbf{t} := (t_1, \ldots, t_n)$ deux n-uplets de réels positifs tels que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $s_i < t_i$.

On pose $D_U(\mathbf{s}, \mathbf{t}) := \{x \in \mathbb{A}_{\mathcal{A}}^n | \ \pi(x) \in U, \forall i \in [\![1, n]\!] s_i \prec |T_i(x)| < t_i\}$ où $\prec$ est la relation sur $\mathbb{R}^+$, définie par $x \prec y$ si $x < y$ ou si $x = 0$. Nous appellerons par abus de langage ces ensembles des polycouronnes relatives.

Passons à présent aux résultats de connexité. Nous allons, dans un premier temps, montrer que les polycouronnes relatives dont la base est connexe par arcs sont elles mêmes connexes par arcs. Puis nous nous servirons de ce premier résultat pour montrer qu'elles sont en fait élastiques. Enfin nous en conclurons que tout point admet une base de voisinages connexes par arcs.

Proposition 5.28. *Soit U un sous-ensemble connexe par arcs de $\mathcal{M}(\mathcal{A})$. Soient, de plus, $\boldsymbol{s} := (s_1, \ldots, s_n)$ et $\boldsymbol{t} := (t_1, \ldots, t_n)$ deux n-uplets de réels positifs tel que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $s_i < t_i$.*

Le sous-ensemble $D_U(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{t})$ de $\mathbb{A}_{\mathcal{A}}^n$ est connexe par arcs.

Démonstration de la proposition. Il existe une famille de réels $(r_1, \ldots, r_n)$ telle que pour tout i, $s_i < r_i < t_i$ et telle que les r_i forment une famille libre de $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{R}_+^*)$. Nous allons utiliser $\sigma : U \to D_U(\mathbf{s}, \mathbf{t})$ la section continue de π définie comme ci-dessus. En vertu de l'existence de σ et du fait que U est connexe par arcs, il suffit pour conclure de montrer que pour tout $b \in U$ la fibre $\pi^{-1}(\{b\})$ est connexe par arcs.

Si b est un point de U_{um} le résultat est dû à Berkovich (voir corollaire 3.2.3 de [Ber90] où Berkovich le démontre pour $\overline{D}(\mathbf{1})$, mais le même raisonnement fonctionne pour une polycouronne fermée quelconque, on conclut ensuite en écrivant une polycouronne ouverte comme une union croissante de polycouronnes fermées).

Si b est un point de $U\backslash U_{um}$, c'est une propriété élémentaire de $\mathbb{C}^n$. $\square$

Nous allons expliquer comment en déduire la connexité locale de $\mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}$.

Proposition 5.29. *Soit x un point de $\mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}$. Le point x admet une base de voisinages ouverts $\mathcal{V}$ tel que pour tout $V \in \mathcal{V}$, il existe un ouvert U connexe par arcs de $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ et un couple $\boldsymbol{s} := (s_1, \ldots, s_n)$, $\boldsymbol{t} := (t_1, \ldots, t_n)$ de n-uplets de réels positifs (avec $s_i < t_i$ pour tout i) et un morphisme fini, ouvert $\varphi : V \to D_U(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{t})$.*

Démonstration de la proposition. Nous allons démontrer cet énoncé par récurrence sur n. Dans le cas où n est nul il n'y a donc rien à démontrer.

Supposons que nous ayons démontré l'énoncé pour $n = N$, et montrons le dans le cas où $n = N + 1$.

Soit x un point de $\mathbb{A}^{N+1}_{\mathcal{A}}$. On note x_N l'image de x par la projection sur les N premières variables. Soit $\mathcal{V}_N$ une base de voisinages ouverts de x_N dans $\mathbb{A}^N_{\mathcal{A}}$ satisfaisant aux conditions de la proposition. La Proposition 6.7 de [Poi13] (que nous redémontrerons dans la proposition 3.1) assure qu'il existe une base de voisinages ouverts $\mathcal{V}$ de x dans $\mathbb{A}^{N+1}_{\mathcal{A}}$ constituée de voisinages de la forme $D_V(P; s, t)$ avec V appartenant à $\mathcal{V}_N$, $s < t$ deux réels positifs et P un polynôme à coefficients dans $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^N_{\mathcal{A}}}(V)$.

Soit $D_V(P; s, t)$ un voisinage appartenant à $\mathcal{V}$. Par définition de $\mathcal{V}_N$, il existe deux N-uplets $\mathbf{s}_N := (s_1, \ldots, s_N)$, $\mathbf{t}_N := (t_1, \ldots, t_N)$ tels que $s_i < t_i$ pour tout $i \in [\![1, N]\!]$ et un morphisme fini ouvert $\varphi : V \to D_U(\mathbf{s}_N, \mathbf{t}_N)$. On remarque que $p^{-1}_{N+1,N}(D_U(\mathbf{s}_N, \mathbf{t}_N))$ et $p^{-1}_{n+1,n}(V)$ sont respectivement isomorphes aux produits fibrés $D_U(\mathbf{s}_N, \mathbf{t}_N) \times \mathbb{A}^1_{\mathcal{A}}$ et au produit fibré $V \times \mathbb{A}^1_{\mathcal{A}}$. Ainsi la proposition 5.18 assure que le morphisme suivant :

$$\varphi : p^{-1}_{N+1,N}(D_U(\mathbf{s}_N, \mathbf{t}_N)) \to p^{-1}_{n+1,n}(V)$$

est un morphisme fini et plat. La question d'être fini et plat étant locale en l'espace d'arrivée, le morphisme $\varphi : D_V(s, t) \to D_U(\mathbf{s}, \mathbf{t})$, où $\mathbf{s} := (\mathbf{s}_N, s)$ et $\mathbf{t} := (\mathbf{t}_N, t)$, est encore un morphisme fini et plat (en particulier fini et ouvert d'après 5.17). Il suffit maintenant de remarquer que grâce à la proposition 5.17 le morphisme $\varphi_P : D_V(P; s, t) \to D_V(s, t)$ est lui aussi fini ouvert pour en déduire la proposition souhaitée. $\square$

Corollaire 5.30. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}$ est localement connexe.*

Démonstration du corollaire. La proposition 5.28 permet d'affirmer que $D_U(\mathbf{s}, \mathbf{t})$ est connexe. Ainsi en utilisant la proposition 5.20 on sait que V n'a qu'un nombre fini de composantes connexes et donc qu'il existe un voisinage connexe de x dans V. $\square$

Nous allons pouvoir maintenant montrer que l'ensemble $D_U(\mathbf{s}, \mathbf{t})$ est élastique.

Nous allons commencer par montrer deux résultats partiels qui vont nous permettre à l'aide de la proposition 5.26 de montrer le résultat souhaité.

Proposition 5.31. *Soit U un ouvert connexe par arcs de $\mathcal{M}(\mathcal{A})_{um}$ non vide. Soient, de plus, $\boldsymbol{s} := (s_1, \ldots, s_n)$ et $\boldsymbol{t} := (t_1, \ldots, t_n)$ deux n-uplets de réels positifs tel que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $s_i < t_i$.*

Le sous-ensemble $D_U(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{t})$ de $\mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}$ est élastique.

Démonstration de la proposition. Remarquons dans un premier temps que $\mathcal{A}$ ne peut pas être un corps archimédien car nous avons supposé que U est non vide et inclus dans $\mathcal{M}(\mathcal{A})_{um}$.

Nous allons démontrer l'énoncé par récurrence sur n.

Si $n = 0$, il n'y a rien à démontrer car U est localement connexe par arcs, connexe et non vide.

Supposons que nous ayons démontré l'énoncé au rang $n-1$, et montrons-le au rang n.

Si $\mathcal{A}$ est un corps non archimédien, la proposition 5.29 et la proposition 5.24 entrainent que $\mathbb{A}^{n-1}_{\mathcal{A}}$ est localement connexe par arcs.

De même, si $\mathcal{A}$ est un anneau d'entiers de corps de nombres muni de la norme usuelle, ces mêmes propositions impliquent que $\mathbb{A}^{n-1}_{\mathcal{A}_{triv}} \simeq (\mathbb{A}^{n-1}_{\mathcal{A}})_{um}$ où $\mathcal{A}_{triv}$ est l'anneau $\mathcal{A}$ muni de la norme triviale, est localement connexe par arcs. Ainsi nous pouvons affirmer que $D_U(\mathbf{s}_{n-1}, \mathbf{t}_{n-1})$ où $\mathbf{s}_{n-1} := (s_1, \ldots, s_{n-1})$ et $\mathbf{t}_{n-1} := (t_1, \ldots, t_{n-1})$ est localement connexe par arcs.

Considérons la projection sur les $n-1$ premières variables

$$p_{n,n-1} : D_U(\mathbf{s}, \mathbf{t}) \to U_{n-1} := D_U(\mathbf{s}_{n-1}, \mathbf{t}_{n-1}).$$

Soient s'_n et t'_n deux réels positifs vérifiant les inégalités $t'_n < t_n$ et $s_n \prec s'_n$. La proposition 5.27 assure qu'il suffit de montrer que l'espace topologique $\overline{D}_{U_{n-1}}(s'_n, t'_n) \subset \mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}$ est élastique. Soit $x_{0,n-1} \in U_{n-1}$. On pose $x_0 := \eta_{x_{0,n-1},0,t'_n} \in \overline{D}_{U_{n-1}}(s'_n, t'_n)$.

Nous allons nous servir de la section continue de $p_{n,n-1}$ suivante :

$$\begin{array}{cccc} \eta_{.,0,t'_n} : & U_{n-1} & \to & \overline{D}_{U_{n-1}}(s'_n, t'_n) \\ & y & \mapsto & \eta_{y,0,t'_n} \end{array}.$$

Soit $x \in \overline{D}_{U_{n-1}}(s'_n, t'_n)$. Nous allons, maintenant, construire un chemin ℓ_x reliant x à x_0, puis nous montrerons qu'il satisfait les axiomes des espaces élastiques.

On note x_{n-1} la projection de x sur les $n-1$ premières variables et $\ell_{x_{n-1}}$ un chemin reliant x_{n-1} à $x_{0,n-1}$ dans U_{n-1}. Il satisfait les axiomes des espaces élastiques car U_{n-1} est localement connexe par arcs.

Il existe un chemin ℓ'_x homéomorphe à $[0,1]$ reliant x à $\eta_{x_{n-1},0,t'_n}$ dans $\overline{D}_{x_{n-1}}(s'_n, t'_n)$. On note ℓ_x la concaténation de ℓ'_x et de l'image par la section $\eta_{.,0,t'_n}$ du chemin $\ell_{x_{n-1}}$.

Vérifions maintenant que les chemins ℓ_x ainsi construit donnent à $\overline{D}_{U_{n-1}}(s'_n, t'_n)$ une structure d'espace élastique.

Soient $x \in \overline{D}_{U_{n-1}}(s'_n, t'_n)$ et V un voisinage de ℓ_x dans $\overline{D}_{U_{n-1}}(s'_n, t'_n)$.

Le chemin ℓ'_x est égal à l'ensemble

$$\bigcap_{\epsilon>0} \bigcap_{\tilde{V} \ni x_{n-1}} \bigcap_{P \in \mathcal{A}[T]} \{y \in \overline{D}_{\tilde{V}}(s'_n, t'_n) |\, |P(y)| \geq |P(x)| - \epsilon\}$$

où l'intersection est prise sur les voisinages $\tilde{V}$ de x_{n-1} dans U_{n-1}. Chacun des ensembles

$$\{y \in \overline{D}_{\tilde{V}}(s'_n, t'_n)|\ |P(y)| \geq |P(x)| - \epsilon\}$$

est un voisinage de ℓ'_x. Par un argument de compacité, on sait qu'il existe une famille finie de polynômes $(P_i)_{i\in[\![0,n]\!]} \subset \mathcal{A}[T_1, \ldots, T_n]$, un voisinage $\tilde{V}_0$ de x_{n-1} dans U_{n-1} que l'on peut supposer connexe par arcs et un réel strictement positif $\epsilon_0 > 0$ tels que l'ensemble

$$V' := \bigcap_{i=0}^{n} \{y \in \overline{D}_{\tilde{V}_0}(s'_n, t'_n)|\ |P_i(y)| \geq |P_i(x)| - \epsilon_0\}$$

soit un voisinage ℓ'_x dans V. C'est en particulier un voisinage de x.

Nous pouvons maintenant montrer que tout point $z \in V'$ peut être relié à $\eta_{x_n-1,0,t'_n}$ (donc à x_0) par un chemin inclus dans V.

On note z_{n-1} la projection de z sur les $n-1$ premières variables de z. L'unique chemin reliant z à $\eta_{z_{n-1},0,t'_n}$ dans $\overline{D}_{z_{n-1}}(s'_n, t'_n)$ est inclus dans V'. De plus, puisque $\tilde{V}$ est connexe par arcs, il existe un chemin reliant z_{n-1} à x_{n-1}. Ainsi l'image de ce chemin par la section continue $\eta_{\cdot,0,t'_n} : \tilde{V} \to \overline{D}_{\tilde{V}_0}(s'_n, t'_n)$ relie $\eta_{z_{n-1},0,t'_n}$ à $\eta_{x_{n-1},0,t'_n}$ dans V'. Il existe donc un chemin reliant z à $\eta_{z_{n-1},0,t'_n}$ est inclus dans V'. □

Proposition 5.32. *Soit U un ouvert connexe par arcs de $\mathcal{M}(\mathcal{A})\backslash\mathcal{M}(\mathcal{A})_{um}$ non vide. Soient, de plus, $\boldsymbol{s} := (s_1, \ldots, s_n)$ et $\boldsymbol{t} := (t_1, \ldots, t_n)$ deux n-uplets de réels positifs tel que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $s_i < t_i$.*

Le sous-ensemble de $\mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}$, $D_U(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{t})$ est élastique.

Démonstration de la proposition. Remarquons dans un premier temps que $\mathcal{A}$ ne peut pas être un corps non archimédien car nous avons supposé que U est non vide et inclus dans $\mathcal{M}(\mathcal{A})\backslash\mathcal{M}(\mathcal{A})_{um}$.

Dans le cas où $\mathcal{A}$ est un corps archimédien, l'ensemble $D_U(\mathbf{s}, \mathbf{t})$ n'est autre qu'une polycouronne de $\mathbb{C}^n$ (potentiellement quotientée par la conjugaison complexe), il est donc connexe et localement connexe par arcs (ce qui implique qu'il est élastique).

Passons au cas où $\mathcal{A}$ est un anneau d'entiers de corps de nombres. Puisque U est un ouvert connexe de $\mathcal{M}(\mathcal{A})\backslash\mathcal{M}(\mathcal{A})_{um}$, il est inclus dans une composante connexe de l'espace topologique $\mathcal{M}(\mathcal{A})\backslash\mathcal{M}(\mathcal{A})_{um}$. On note ρ le plongement complexe correspondant à cette composante connexe. Puisque toute composante connexe de $\mathcal{M}(\mathcal{A})\backslash\mathcal{M}(\mathcal{A})_{um}$ est homéomorphe à $]0, 1]$, U est lui aussi un segment.

La Proposition 3.4.2 de [Poi10] assure que si ρ se factorise par $\mathbb{R}$, $\pi^{-1}(U) \subset \mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}$ est homéomorphe à $]0, 1[\times\mathbb{C}^n/\sim$ où $\sim$ est la relation d'équivalence induite par la conjugaison complexe. Il est donc localement connexe par arcs. L'ensemble $D_U(\mathbf{s}, \mathbf{t})$ étant ouvert dans $\pi^{-1}(U) \subset \mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}$, il est lui aussi localement connexe par arcs. Puisqu'il est connexe (voir proposition 5.28) il est élastique.

En utilisant une fois de plus la proposition 3.4.2 de [Poi10] si ρ ne se factorise pas par $\mathbb{R}$, $\pi^{-1}(U) \subset \mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}$ est homéomorphe à $]0, 1[\times\mathbb{C}^n$. Il est donc lui aussi localement connexe par arcs, nous obtenons alors le résultat souhaité de la même manière. □

Proposition 5.33. *Soit U un ouvert connexe par arcs de $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ non vide. Soient, de plus, $\boldsymbol{s} := (s_1, \ldots, s_n)$ et $\boldsymbol{t} := (t_1, \ldots, t_n)$ deux n-uplets de réels positifs tels que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $s_i < t_i$.*

Le sous-ensemble de $\mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}$, $D_U(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{t})$ est élastique.

Démonstration de la proposition. On pose $U_{um} := U \cap \mathcal{M}(\mathcal{A})_{um}$ et $U_\infty := U \backslash U_{um}$. D'après la description explicite des parties connexes suivant le Théorème 3.1.13 de [Poi10], U_{um} et U_∞ sont eux aussi connexes par arcs.

Supposons que l'ensemble $U_{um} \cap \overline{U}_\infty$ est vide. Puisque U est connexe, cela implique que U_{um} ou U_∞ est vide. On en conclut que U est inclus dans $\mathcal{M}(\mathcal{A})_{um}$ ou qu'il est inclus dans $\mathcal{M}(\mathcal{A}) \backslash \mathcal{M}(\mathcal{A})_{um}$. On conclut alors à l'aide des propositions 5.31 et 5.32.

Supposons maintenant que $U_{um} \cap \overline{U}_\infty$ est non vide. Grâce à la proposition 5.26, il suffit de montrer les deux résultats suivants :

— les deux ensembles $D_{U_{um}}(\mathbf{s}, \mathbf{t})$ et $D_{U_\infty}(\mathbf{s}, \mathbf{t})$ sont élastiques ;

— tout point $x \in D_U(\mathbf{s}, \mathbf{t})$ appartenant à $D_{U_{um}}(\mathbf{s}, \mathbf{t}) \backslash \overbrace{D_{U_{um}}(\mathbf{s}, \mathbf{t})}^{\circ}$ (qui est non vide car $U_{um} \cap \overline{U_\infty}$ l'est), admet une base de voisinages $\mathcal{V}_x$ dans $D_U(\mathbf{s}, \mathbf{t})$, telle que pour tout voisinage V de x appartenant $\mathcal{V}_x$ et tout point $y \in V \cap D_{U_\infty}(\mathbf{s}, \mathbf{t})$, il existe un chemin dans V reliant y à un point x' de $D_{U_{um}}(\mathbf{s}, \mathbf{t})$.

Puisque U_∞ et U_{um} sont connexes par arcs, la proposition 5.31 assure que $D_{U_{um}}(\mathbf{s}, \mathbf{t})$ est élastique et la proposition 5.32 assure que $D_{U_\infty}(\mathbf{s}, \mathbf{t})$ est élastique.

Enfin, il nous faut maintenant montrer le troisième point de la proposition 5.26. Soit x un point appartenant à $D_{U_{um}}(\mathbf{s}, \mathbf{t}) \backslash \overbrace{D_{U_{um}}(\mathbf{s}, \mathbf{t})}^{\circ}$. La proposition 5.29 assure que x admet une base de voisinages $\mathcal{V}_x$ dans $D_U(\mathbf{s}, \mathbf{t})$ telle que pour tout voisinage V de x appartenant à $\mathcal{V}_x$ il existe deux n-uplets de réels $s' := (s'_1, \ldots, s'_n)$ et $t' := (t'_1, \ldots, t'_n)$, un ouvert connexe $U' \subset \mathcal{M}(\mathcal{A})$ et un morphisme fini, ouvert $\varphi : V \to D_{U'}(\mathbf{s}', \mathbf{t}')$.

Il suffit de remarquer qu'une telle base de voisinages vérifie les propriétés souhaitées. En effet, soient V un voisinage de x appartenant à $\mathcal{V}_x$ et $y \in V \cap D_{U_\infty}(\mathbf{s}, \mathbf{t})$. L'image $\varphi(y)$ de y par $\varphi : V \to D_{U'}(\mathbf{s}', \mathbf{t}')$ appartient $D_{U'_\infty}(\mathbf{s}', \mathbf{t}')$. Puisque $D_{U'}(\mathbf{s}', \mathbf{t}')$ est connexe par arcs, il existe un chemin ℓ reliant $\varphi(y)$ à un point y' appartenant à $D_{U'_{um}}(\mathbf{s}', \mathbf{t}')$. Quitte à modifier ℓ, on peut supposer qu'il est homémorphe au segment $[0, 1]$ (voir par exemple 2.1 proposition 1 de [DH84]) et ainsi supposer qu'il est localement connexe par arcs. Maintenant le morphisme $\varphi : \varphi^{-1}(\ell) \to \ell$ est encore un morphisme fini ouvert. Ainsi par la proposition 5.24, nous savons que $\varphi^{-1}(\ell)$ n'a qu'un nombre fini de composantes connexes et qu'elles sont connexes par arcs. On note Σ la composante connexe contenant y. En utilisant une fois de plus le fait que φ est fini ouvert nous savons que $\varphi : \Sigma \to \ell$ est surjectif. Cela implique en particulier que $\Sigma \cap D_{U_{um}}(\mathbf{s}, \mathbf{t})$ est non vide. Nous pouvons donc affirmer qu'il existe un chemin $\Sigma \subset V$ reliant y à un point x' appartenant à $D_{U_{um}}(\mathbf{s}, \mathbf{t})$. $\square$

Théorème 5.34. *Soit $\mathcal{A}$ un anneau d'entiers de corps de nombres. L'espace analytique $\mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}$ est localement connexe par arcs.*

Démonstration du théorème. Soit $x \in \mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}$. La proposition 5.29 assure qu'il existe une base de voisinages $\mathcal{V}$ de x tels que pour tout élément de V de $\mathcal{V}$, il existe, un sous-ensemble U

de $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ et un couple $\mathbf{s} := (s_1, \dots, s_n)$, $\mathbf{t} := (t_1, \dots, t_n)$ de n-uplets de réels positifs et un morphisme fini, ouvert $\varphi : V \to D_U(\mathbf{s}, \mathbf{t})$. Ainsi en utilisant la proposition 5.33 et la proposition 5.24, on obtient que x a un voisinage connexe par arcs dans V et donc dans $\mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}$. □

Chapitre 6

Quelques propriétés des espaces analytiques et résultats de connexité locale par arcs

Dans ce chapitre, nous allons généraliser à tout espace analytique sur un anneau d'entiers de corps de nombres le résultat de connexité obtenu dans le chapitre précédent. Pour cela, nous allons nous intéresser à certains types d'espaces analytiques, les espaces intègres. Nous montrerons que tout point d'un espace analytique admet un voisinage qui peut s'écrire en tant qu'ensemble, comme union finie d'espaces analytiques intègres en ce point. Cela nous permettra par la suite de réduire l'étude locale des espaces analytiques au cas des espaces intègres en un point. Ensuite nous montrons que tout point x d'un espace analytique X, tel que X soit intègre en x, admet un voisinage U et un morphisme fini, ouvert $\varphi : U \to V$ où V est un ouvert d'un espace affine (au-dessus d'un anneau d'entier de corps de nombres ou au-dessus d'un corps non archimedien). Nous en déduirons dans un premier temps la connexité locale par arcs des espaces analytiques, puis cela nous permettra de définir la notion de dimension d'un espace analytique de manière univoque. Enfin dans la dernière section, nous nous intéresserons à quelques propriétés du foncteur d'analytification construit dans la section 4.1 et nous montrerons en particulier que la notion de dimension que nous avons introduite est cohérente avec la dimension d'un schéma et que pour tout schéma de type fini X, le morphisme naturel $X^{an} \to X$ est un morphisme plat d'espaces localement annelés.

Dans ce chapitre $\mathcal{A}$ désignera toujours un anneau de Banach géométrique. Cependant, nous ne montrerons la connexité locale des espaces analytiques et définirons la dimension d'un espace analytique que dans le cas où $\mathcal{A}$ est un anneau d'entiers de corps de nombres munis de sa norme usuelle.

6.1 Décomposition locale des espaces analytiques en composantes irréductibles

Commençons par définir les espaces analytiques localement intègres évoqués dans l'introduction.

Définition 6.1. Soit $(X, \mathcal{O}_X)$ un espace analytique et $x \in X$, on dit que $(X, \mathcal{O}_X)$ est **intègre en** x si $\mathcal{O}_{X,x}$ est un anneau intègre. On dit que $(X, \mathcal{O}_X)$ est **localement intègre** si pour tout $x \in X$, X est intègre en x.

Exemple 6.2. La proposition 1.29 assure que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'espace affine $\mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}$ est localement intègre.

Pour exhiber des espaces analytiques intègres en un point, nous allons mettre, d'abord, en évidence des espaces ayant des propriétés plus faibles.

Soit X un espace analytique.

— On note $i(X)$ le faisceau d'idéaux défini de la façon suivante : soit U un ouvert de X, $i(X)(U)$ est l'ensemble des éléments f de $\mathcal{O}_X(U)$ tels que pour tout $x \in U$ l'élément $f(x)$ est nul dans $\kappa(x)$.

— On note $Ni(X)$ le faisceau associé au préfaisceau qui à un ouvert U de X associe l'ensemble des éléments nilpotent de $\mathcal{O}_X(U)$.

Proposition 6.3. *Soit X un espace analytique. Les faisceaux $i(X)$ et $Ni(X)$ coïncident.*

Démonstration de la proposition. Soit x un point de X. Il suffit de montrer que $i(X)_x$ est égale à $Ni(X)_x$ en tant qu'idéal de $\mathcal{O}_{X,x}$.

Montrons d'abord que $Ni(X)_x \subset i(X)_x$. Soit $f \in Ni(X)_x$. Le germe f est nilpotent dans $\mathcal{O}_{X,x}$, il l'est donc sur un voisinage ouvert U de x. Ainsi $f(y)$ est nilpotent dans $\kappa(y)$ et donc $f(y) = 0$ pour tout $y \in U$. Cela implique que f appartient à $i(X)_x$.

Montrons maintenant l'autre inclusion. Soient f appartenant à $i(X)_x$ et V un voisinage de x dans X sur lequel f est définie. Par définition d'espace analytique, quitte à prendre V suffisamment petit, on peut supposer que V est un sous-espace analytique d'un ouvert U d'un espace affine $\mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}$. On note $\mathcal{I}$ le faisceau d'idéaux sur U correspondant à V. Quitte à rétrécir U on peut supposer que f admet un relèvement $\tilde{f}$ à U tout entier. Puisque f appartient à $i(X)_x$, $\tilde{f}$ est nul sur V qui est égal au support de $\mathcal{O}_U/\mathcal{I}$. Le théorème 5.13 affirme alors qu'il existe $t \in \mathbb{N}$ tel que $\tilde{f}^t\mathcal{O}_U/\mathcal{I}_x = 0$. Or $\tilde{f}^t(\mathcal{O}_U/\mathcal{I})_x$ est isomorphe à $f^t\mathcal{O}_{V,x}$. Donc f appartient à $Ni(X)_x$. □

Définition 6.4. Soient X un espace analytique et $x \in X$. Nous dirons que X est **irréductible** en x si $i(X)_x$ est un idéal premier de $\mathcal{O}_{X,x}$.

Remarque 6.5. Il existe des espaces analytiques irréductibles en un point mais non intègres en ce point.

Par exemple, le sous-espace analytique de $\mathbb{A}^1_{\mathcal{A}}$ définit par le polynôme T^2 n'est intègre en aucun point, il est par contre irréductible en tout point. La proposition 6.3 permet d'affirmer que c'est un phénomène dû à l'existence d'éléments nilpotents (non triviaux) dans le faisceau structural.

Proposition 6.6. *Soient X un espace analytique et x un point de X. Si X est intègre en x, il est irréductible en x.*

Démonstration de la proposition. Si X est intègre en x, l'anneau $\mathcal{O}_{X,x}$ est intégre. Ainsi l'idéal $Ni(X)_x$ est réduit à zéro. On conclut alors grâce à la proposition 6.3. □

La propriété suivante permet de dire qu'un espace analytique X irréductible en x n'est pas très loin d'être intègre en x.

Proposition 6.7. *Soit X un espace analytique et $x \in X$. Supposons que X soit irréductible en x. Il existe un voisinage V de x dans X et un sous-espace analytique $\widetilde{V}$ de V tel que $\widetilde{V} = V$ en tant qu'ensemble et tel que $\widetilde{V}$ soit un espace analytique intègre en x.*

Démonstration de la proposition. Puisque X est irréductible en x, l'idéal $i(X)_x$ est premier. Puisque $\mathcal{O}_{X,x}$ est nœthérien (corollaire 9.19 de [Poi13]), il existe une famille finie f_i de germes au voisinage de x qui engendrent $i(X)_x$. Soit V un voisinage de x dans X sur lequel les f_i sont définies, on note $\widetilde{V}$ le sous-espace analytique de V défini par $\mathcal{I}$ le faisceau d'idéaux engendré par les fonctions f_i.

Par définition de $i(X)$, on peut choisir V de telle sorte que pour tout $y \in V$ on ait $f_i(y) = 0$ ainsi y appartient à $\widetilde{V}$. Qui plus est, $\mathcal{O}_{\widetilde{V},x}$ est isomorphe à $\mathcal{O}_{X,x}/i(X)_x$. Ainsi, puisque $i(X)_x$ est un idéal premier, $\mathcal{O}_{\widetilde{V},x}$ est intègre. □

Passons maintenant à la décomposition locale d'un espace analytique X en un point x en sous-espaces analytiques intègres en x.

Commençons par rappeler une propriété d'algèbre :

Théorème 6.8. *Soit R un anneau nœthérien, et soit I un idéal réduit de R (i.e. tel que R/I soit un anneau réduit). Il existe une famille finie d'idéaux premiers $P_1, \cdots, P_s$ telle que l'on ait les deux propriétés suivantes :*

1. $I = \cap_{i=1}^{s} P_i$;
2. $P_j \nsubseteq P_k$ *si* $j \neq k$.

De plus cette famille est unique.

De la même manière qu'en géométrie algébrique, nous allons nous servir de cette propiété pour obtenir la décomposition locale d'un espace analytique en composantes intègres.

Proposition 6.9. *Soient X un espace analytique et $x \in X$. On note $(P_i)_{i \in [\![1,s]\!]}$ la famille d'idéaux premiers de $\mathcal{O}_{X,x}$ tels que $i(X)_x = \cap_{i=1}^{s} P_i$ et $P_j \nsubseteq P_k$ si $j \neq k$ (dont l'existence est assurée par le théorème précédent).*

Il existe un voisinage V de x dans X tel que $V = V_1 \cup ... \cup V_s$ (en tant qu'ensemble) où les V_i sont des sous-espaces analytiques de V tels que $\mathcal{O}_{V_i,x} = \mathcal{O}_{X,x}/P_i$ et $V_i \nsubseteq V_j$ pour tout $i \neq j$.

De plus, cette décomposition est unique. C'est-à-dire que si l'on a une décomposition $V' = V_1' \cup ... \cup V_r'$ avec V' un voisinage de x dans X, $i(V_i')_x$ premier pour tout $i \in [\![1, r]\!]$

et $V'_i \not\subseteq V'_j$ *pour tout* $i \neq j$*, alors* $r = s$ *et pour tout* $i \in [\![1, s]\!]$ *il existe* $j \in [\![1, s]\!]$ *et* $W \subset V' \cap V$ *tel que* $V_i \cap W = V'_j \cap W$*.*

Démonstration de la proposition. Existence :

Soit $(f_{i,j})_{j \in [\![1,k_i]\!]}$ une famille finie de fonctions engendrant l'idéal P_i (on utilise ici la nœthérianité de $\mathcal{O}_{X,x}$). Il existe V un voisinage de x sur lequel les fonctions $f_{i,j}$ sont définies pour tout (i, j). On note $\mathcal{I}_i$ le faisceau d'idéaux de $\mathcal{O}_V$ engendré par les fonctions $f_{i,j}$ pour i fixé, et V_i le sous-espace analytique fermé de V défini par cet idéal.

Montrons que, quitte à rétrécir V, on a l'égalité $V = \cup_{i=1}^s V_i$. En effet, quitte à remplacer V par un voisinage suffisamment petit de x, on peut supposer que pour tout s-uplet $(j_1, \dots, j_s) \in \prod_{i=1}^s [\![1, k_i]\!]$ le produit $\Pi_{i=1}^s f_{i,j_i}$ appartient à $i(X)(V)$. Soit $y \in V$. Supposons que y n'appartienne pas à $\cup_{i=1}^s V_i$, cela implique que pour tout $i \in [\![1, s]\!]$ il existe j_i tel que $f_{i,j_i}(y) \neq 0$. On a donc $\Pi_{i=1}^s f_{i,j_i}(y) \neq 0$ or $\Pi_{i=1}^s f_{i,j_i}$ appartient à $i(X)(V)$, c'est donc absurde.

On a l'inclusion $P_i = \mathcal{I}_{i,x} \subset i(V_i)_x$. Il reste à montrer l'inclusion inverse.

Nous allons la montrer par l'absurde. Supposons donc que cet énoncé soit faux. Soit f_i un élément de $i(V_i)_x \backslash P_i$. Pour tout $j \neq i$, puisque $P_j \not\subseteq P_i$, il existe une fonction $f_j \in P_j \backslash P_i$. On note $f := f_1 \cdots f_s$ le germe de fonction défini au voisinage x ainsi obtenu. Cette fonction est nulle au voisinage de x dans X puisqu'elle est nulle au voisinage de x dans chacun des V_i. Ainsi f appartient à $i(X)_x$ qui est un sous-idéal de P_i. Le germe f étant le produit de germes n'appartenant pas à P_i et P_i étant premier, c'est absurde.

Le fait que $V_i \not\subseteq V_j$ pour tout $i \neq j$ découle du fait que nous ayons la même propriété pour les P_i.

Unicité :

Soit $V' = V'_1 \cup \cdots \cup V'_r$ une autre décomposition d'un voisinage de x dans X. On a $i(X)_x = \cap_{i=1}^r i(V'_i)_x$. De plus, pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, $i(V'_i)_x$ est un idéal premier et $i(V'_i)_x$ n'est pas inclus dans $i(V'_j)_x$ pour tout $i \neq j$. Par unicité de la décomposition intersection d'idéaux premiers la famille $(i(V'_i)_x)_i$ est la décomposition de $i(X)_x$ comme intersection d'idéaux premiers du théorème 6.8. Ainsi, par unicité de cette décomposition, $s = r$ et après une permutation convenable pour $i \in [\![1, s]\!]$, $i(V_i)_x = i(V'_i)_x$. Ce qui implique qu'il existe un voisinage $W \subset V' \cap V$ de x, tel que $V'_i \cap W = V_i \cap W$. □

6.2 Espaces intègres en un point et connexité locale des espaces analytiques au-dessus d'un anneau d'entiers de corps de nombres

Le but de cette partie va être d'étudier les espaces analytiques irréductible en un point au voisinage de ce point puis d'en déduire la connexité locale par arcs de tout espace analytique.

Dans le cas des espaces analytiques localement intègres on peut raffiner le critère d'ouverture des morphismes finis donné dans la proposition 5.15.

Proposition 6.10. *Soit $\varphi : X \to Y$ un morphisme fini entre espaces $\mathcal{A}$-analytiques avec Y localement intègre, et soit $x \in X$. Si φ est ouvert en x et X est intègre en x, il existe un voisinage ouvert U de x et V un voisinage de $\varphi(x)$ tel que $\varphi(U) \subset V$ et tel que le morphisme $\varphi : U \to V$ soit fini et ouvert.*

Avant de donner la démonstration de cet énoncé, nous allons introduire une notation. Soit $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent sur X. On note $\mathcal{F}^{tor}$ le sous-faisceau de $\mathcal{F}$ défini de la manière suivante :

Soit U un ouvert de X et $f \in \mathcal{F}(U)$. La section f appartient à $\mathcal{F}^{tor}(U)$ si pour tout $x \in U$, $f_x \in \mathcal{F}_x$ est un élément de $\mathcal{O}_{X,x}$-torsion.

Démonstration de la proposition. Grâce à la proposition 5.15, il suffit de montrer qu'il existe un voisinage ouvert U de x dans X tel que pour tout $y \in \varphi(U)$, $\varphi_*(\mathcal{O}_X)_y$ est un $\mathcal{O}_{Y,y}$-module sans torsion. Puisque φ est fini on peut choisir U de telle sorte que $\varphi(x)$ n'ait que x pour antécédent dans U par φ et tel que la restriction de φ à U soit encore un morphisme fini sur un voisinage V de $\varphi(x)$.

On note $\mathcal{F}$ le faisceau $\varphi_*(\mathcal{O}_U)$. La proposition 5.8 assure que $\mathcal{F}$ est cohérent. On peut remarquer, dans un premier temps, que si l'on montre les deux énoncés suivants :

— $\mathcal{F}_{\varphi(x)}$ est un $\mathcal{O}_{V,\varphi(x)}$-module sans torsion,

— le faisceau $\mathcal{F}^{tor}$ est un faisceau cohérent,

l'ensemble des points z tel que $\mathcal{F}_z$ soit sans torsion est un voisinage de x et donc l'énoncé sera montré.

Commençons par le premier point. Puisque U a été choisi de telle sorte que $\varphi(x)$ n'ait que x pour antécédent dans U par φ, $\mathcal{F}_{\varphi(x)} \simeq \mathcal{O}_{U,x}$. Puisque φ est ouvert en x le morphisme naturel $\mathcal{O}_{V,\varphi(x)} \to \mathcal{O}_{U,x}$ est une injection. En effet, soit $f \in \mathcal{O}_{V,\varphi(x)}$ définie sur un voisinage V_1 tel que $\varphi^{\#}(f) = 0$ dans $\mathcal{O}_{U,x}$. Il existe U_1 un voisinage de x tel que pour tout y appartenant à $\varphi(U_1)$, la valeur $f(y)$ est nulle. Or par hypothèse $\varphi(U_1)$ est un voisinage de $\varphi(x)$ donc f appartient à $i(X)_{\varphi(x)}$. Mais la proposition 6.3 assure que cela implique que f appartient à $Ni(X)_{\varphi(x)}$ et donc que f est nilpotente dans $\mathcal{O}_{V,\varphi(x)}$. Or Y est localement intègre donc cela implique que f est nulle dans $\mathcal{O}_{V,\varphi(x)}$.

Maintenant puisque $\mathcal{O}_{U,x}$ est intègre cela implique qu'il n'a aucun élément de torsion comme $\mathcal{O}_{V,\varphi(x)}$-module.

Passons au second point. Soit $\mathcal{F}^{**}$ le bidual de $\mathcal{F}$ comme $\mathcal{O}_V$-module. Il suffit de remarquer que puisque V est localement intègre le faisceau $\mathcal{F}^{tor}$ des éléments de torsions de $\mathcal{F}$ est égal au noyau $\mathcal{I}$ de l'application naturelle $\mathcal{F} \to \mathcal{F}^{**}$. Pour vérifier cela, il suffit de le vérifier fibre à fibre.

Montrons d'abord que $\mathcal{F}^{tor}$ est inclus dans $\mathcal{I}$.

Soient $y \in V$, $a \in \mathcal{F}^{tor}_y$ et $\phi \in \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_V}(\mathcal{F}, \mathcal{O}_V)_y \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{V,y}}(\mathcal{F}_y, \mathcal{O}_{V,y})$. Puisque a est de torsion il existe $f \in \mathcal{O}_{V,y}$ non nulle tel que $f \cdot a = 0$ et donc $\phi(f \cdot a) = f \cdot \phi(a) = 0$ ce qui implique que $\phi(a) = 0$ puisque $\mathcal{O}_{V,y}$ est intègre. Autrement dit l'image de a dans $\mathcal{F}^{**}$ est nulle.

Montrons maintenant l'autre inclusion. Soit y un point appartenant à V, il suffit de montrer que $\mathcal{F}/\mathcal{F}^{tor} \to \mathcal{F}^{**}$ est une injection. Or d'après ce qui précède, on a :

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{V,y}}(\mathcal{F}_y, \mathcal{O}_{V,y}) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{V,y}}((\mathcal{F}/\mathcal{F}^{tor})_y, \mathcal{O}_{V,y}).$$

Il suffit de montrer que pour tout $a \in (\mathcal{F}/\mathcal{F}^{tor})_y \backslash \{0\}$ il existe $\phi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{V,y}}((\mathcal{F}/\mathcal{F}^{tor})_y, \mathcal{O}_{V,y})$ tel que $\phi(a) \neq 0$. Puisque $(\mathcal{F}/\mathcal{F}^{tor})_y$ est sans $\mathcal{O}_{V,y}$-torsion et $\mathcal{O}_{V,y}$ est intègre, le morphisme naturel $i : (\mathcal{F}/\mathcal{F}^{tor})_y \to (\mathcal{F}/\mathcal{F}^{tor})_y \otimes_{\mathcal{O}_{V,y}} \mathrm{Frac}(\mathcal{O}_{V,y})$ est une injection. Ainsi on peut identifier a à un élément non nul de l'espace vectoriel $(\mathcal{F}/\mathcal{F}^{tor})_y \otimes_{\mathcal{O}_{V,y}} \mathrm{Frac}(\mathcal{O}_{V,y})$. Par des considérations élémentaires d'algèbre linéaire, il existe un morphisme de $\mathrm{Frac}(\mathcal{O}_{V,y})$-espace vectoriel $\widetilde{\phi} : (\mathcal{F}/\mathcal{F}^{tor})_y \otimes_{\mathcal{O}_{V,y}} \mathrm{Frac}(\mathcal{O}_{V,y}) \to \mathrm{Frac}(\mathcal{O}_{V,y})$ tel que $\widetilde{\phi}(a)$ soit non nul.

Le $\mathcal{O}_{V,y}$-module $(\mathcal{F}/\mathcal{F}^{tor})_y$ est de type fini, on déduit qu'il existe un élément $b \in \mathcal{O}_{V,y}$ tel que le morphisme composé $(b \cdot \tilde{\phi}) \circ i : (\mathcal{F}/\mathcal{F}^{tor})_y \to \mathrm{Frac}(\mathcal{O}_{V,y})$ se factorise par $\mathcal{O}_{V,y}$. La fonction $\phi := (b \cdot \phi) \circ i$ convient alors.

Ainsi $\mathcal{F}^{tor}$ est un faisceau cohérent comme noyau de morphisme entre faisceaux cohérents.

Cela implique grâce à la proposition 5.15 qu'il existe un voisinage ouvert U de x et V de $\varphi(x)$ tel que $\varphi(U) \subset V$ et $\varphi : U \to V$ soit fini et ouvert. $\square$

Remarque 6.11. Avec un peu de travail, il serait surement possible de se passer d'hypothèse sur Y dans la proposition précédente. Cependant l'hypothèse faite sur $x \in X$ est nécessaire. Si X n'est pas irréductible en ce point, il existe des morphismes qui sont finis ouverts en un point mais pas ouverts au voisinage de ce point. Ce phénomène existe déjà dans la géométrie complexe. Pour voir cela, il suffit de prendre l'exemple de l'union d'un plan et d'une droite se joignant en un point et de projeter convenablement cet espace analytique sur un plan. On obtient un morphisme qui est fini et ouvert au point de jonction de ces deux composantes irréductible mais qui n'est pas ouvert au voisinage de ce point.

Le théorème suivant va jouer dans notre cadre le rôle du Théorème de normalisation de Noether de la géométrie rigide (voir le corollaire 2 de la partie 6.1.2 de [BGR84].

Théorème 6.12. *Soient $(X, \mathcal{O}_X)$ un espace analytique, x un point de X tel que $\mathcal{O}_{X,x}$ soit intègre et b la projection de x sur $\mathcal{M}(\mathcal{A})$.*

Si le morphisme $\mathcal{O}_{B,b} \to \mathcal{O}_{X,x}$ est injectif, il existe un voisinage ouvert U de x dans X et un morphisme fini, ouvert $\varphi : U \to V$ où V est un ouvert d'un espace affine $\mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}$.

Si le morphisme $\mathcal{O}_{B,b} \to \mathcal{O}_{X,x}$ n'est pas injectif, il existe un voisinage ouvert U de x dans X et un morphisme fini, ouvert $\varphi : U \to V$ où V est un ouvert d'un espace affine $\mathbb{A}^n_{\mathscr{H}(b)}$.

Démonstration du théorème. Puisque la question est locale, nous pouvons supposer que X est un sous-espace analytique d'un ouvert $\tilde{U}$ de $\mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}$. Il existe $k \in [\![1, n]\!]$ tel que, quitte à réordonner les variables, la projection $p_{n,k} : \mathbb{A}^n_{\mathcal{A}} \to \mathbb{A}^k_{\mathcal{A}}$ envoie x sur x_k un point purement localement transcendant au-dessus de $b := \pi(x) = \pi(x_k)$ et tel que x soit rigide épais au-dessus de x_k.

Pour construire le voisinage ouvert et le morphisme souhaité nous allons, en premier lieu, montrer qu'il existe un voisinage U de x dans X, un $l \in [\![0, n]\!]$ et un morphisme fini $\varphi : U \to V$ où V est un ouvert de $\mathbb{A}^l_{\mathcal{A}}$ tel que :

— $\varphi^{-1}(\{0_{x_k,l}\}) = \{x\}$,

— $\varphi(U)$ est un sous-espace analytique d'un voisinage de $\varphi(x)$ et $\varphi(U) \cap \mathbb{A}^{l-k}_{\mathscr{H}(x_k)}$ est un voisinage de $\varphi(x)$ dans $\mathbb{A}^{l-k}_{\mathscr{H}(x_k)}$.

Cette étape sera la même que $\mathcal{O}_{B,b} \to \mathcal{O}_{X,x}$ soit injectif ou non.

La proposition 5.19 assure que quitte à rétrécir $\tilde{U}$ on peut supposer qu'il existe un voisinage V de $0_{x_k,n} \in \mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}$ et un morphisme d'espaces analytiques $\varphi_{n-k} : \tilde{U} \to V_{n-k}$ vérifiant les propriétés suivantes :

— φ_{n-k} est fini et ouvert tel que $\varphi^{-1}_{n-k}(\{0_{x_k,n}\}) = \{x\}$;

— les deux sous-ensembles de $\mathbb{A}^k_{\mathcal{A}}$, $\tilde{U}_k := p_{n,k}(\tilde{U})$ et $p_{n,k}(V_{n-k})$ sont égaux ;

— le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} \tilde{U} \arrow[r, "\varphi_{n-k}"] \arrow[d, "p_{n,k}"] & V_{n-k} \arrow[d, "p_{n,k}"] \\ \tilde{U}_k \arrow[r, "Id"] & \tilde{U}_k \end{tikzcd}$$

est commutatif.

On note encore φ_{n-k} la restriction de ce morphisme au voisinage ouvert $U_{n-k} := \tilde{U} \cap X$ de x dans X. Nous avons donc construit un morphisme $\varphi_{n-k} : U_{n-k} \to V_{n-k}$ qui est fini, tel que $\varphi^{-1}_{n-k}(\{0_{x_k,n}\}) = \{x\}$ et faisant commuter le diagramme ci-dessus.

Nous allons, maintenant, construire φ en appliquant de l'algorithme suivant au morphisme $\varphi_{n-k} : U_{n-k} \to V_{n-k}$:

Supposons que nous ayons un morphisme fini $\varphi_l : U_l \to V_l$ au voisinage de x avec U_l un voisinage de x dans X et V_l un ouvert d'un espace affine $\mathbb{A}^{k+l}_{\mathcal{A}}$ (l compris entre 0 et $n-k$) avec $\{x\} = \varphi_l^{-1}(\{0_{x_k,k+l}\})$ et faisant commuter le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} U_l \arrow[r, "\varphi_l"] \arrow[d, "p_{n,k}"] & V_l \arrow[d, "p_{n,k}"] \\ \tilde{U}_k \arrow[r, "Id"] & \tilde{U}_k \end{tikzcd} .$$

Par la suite nous dirons qu'un morphisme faisant commuter ce diagramme commute à la projection sur les k premières variables. Nous avons alors deux possibilités :

— Si $\varphi_l(U_l) \cap \mathbb{A}^l_{\mathscr{H}(x_k)}$ est un voisinage de $0_{x_k,k+l}$ dans $\mathbb{A}^l_{\mathscr{H}(x_k)}$, l'algorithme s'arrête.

— Sinon, il existe un germe de fonction $f \in \mathcal{O}_{\mathbb{A}^{k+l}_{\mathcal{A}}, 0_{x_k,k+l}}$ non nulle sur $\mathbb{A}^l_{\mathscr{H}(x_k)}$ et un voisinage U_{l-1} de x dans U_l tels que f soit nulle sur $\varphi_l(U_{l-1})$. Le lemme 3.16 assure qu'il existe un isomorphisme $\sigma_l : \mathbb{A}^{k+l}_{\mathcal{A}} \to \mathbb{A}^{k+l}_{\mathcal{A}}$ tel que $\sigma^{\#}_l(f)$ soit non nulle une fois restreint à $\mathbb{A}^1_{\mathscr{H}(0_{x_k,k+l-1})}$ et commutant à la projection sur les k premières variables. Ainsi $0_{x_k,k+l} = \sigma_l(0_{x_k,k+l})$ est isolé dans $\sigma_l(\varphi_l(U_{l-1})) \cap \mathbb{A}^1_{\mathscr{H}(0_{x_k,k+l-1})}$. On pose alors

$$\varphi_{l-1} = p_{l,l-1} \circ \sigma_l \circ \psi_l : U_{l-1} \to p_{l,l-1}(V_l).$$

Ce morphisme envoie bien x sur $0_{x_k,k+l-1}$ dans $\mathbb{A}^{k+l-1}_{\mathcal{A}}$. Puisque $0_{x_k,k+l}$ est isolé dans $\sigma_l(\varphi_l(U_{l-1})) \cap \mathbb{A}^1_{\mathscr{H}(0_{x_k,k+l-1})}$, la proposition 5.9 nous assure que quitte à rétrécir U_{l-1} et remplacer $p_{l,l-1}(V_l)$ par un voisinage V_{l-1} plus petit de $\varphi_{l-1}(x)$, on peut de nouveau supposer que ce morphisme est fini, que $\varphi_{l-1}^{-1}(\{0_{x_k,k+l-1}\}) = \{x\}$ et qu'il commute à la projection sur les k premières variables.

Remarquons que si $l = 0$ l'énoncé

$$"\varphi_l(U_l) \cap \mathbb{A}^l_{\mathscr{H}(x_k)} \text{ est un voisinage de } 0_{x_k,l} \text{ dans } \mathbb{A}^l_{\mathscr{H}(x_k)}"$$

est toujours vrai. En effet, si $l = 0$ le point $0_{x_k,k+l}$ est le seul de $\mathbb{A}^l_{\mathscr{H}(x_k)}$ ainsi $\varphi_l(U_l) \cap \mathbb{A}^l_{\mathscr{H}(x_k)}$ en est un voisinage. Donc, puisque dans cet algorithme l décroit strictement, il est clair que l'algorithme s'arrête au bout d'un nombre fini d'étapes.

Ainsi, il existe $l \in [\![0, n-k]\!]$ et un morphisme fini $\varphi_l : U_l \to V_l$ où V_l est un ouvert de $\mathbb{A}^{k+l}_{\mathcal{A}}$ tels que $\varphi_l^{-1}(\{0_{x_k,k+l}\}) = \{x\}$ et $\varphi_l(U_l) \cap \mathbb{A}^l_{\mathscr{H}(x_k)}$ contient un voisinage de $0_{x_k,l}$ dans $\mathbb{A}^l_{\mathscr{H}(x_k)}$.

On note $\varphi : U \to V$ le morphisme ainsi construit, où U est un voisinage de x dans X.

Nous allons maintenant montrer l'énoncé du Théorème. Pour cela, nous allons utiliser le morphisme φ construit ci-dessus. Commençons par remarquer quelques faits sur ce morphisme :

— Puisque ce morphisme est fini $\varphi(U)$ possède naturellement une structure de sous-espace analytique fermé de V défini par le noyau $\mathcal{I}$ de $\varphi^{\#} : \mathcal{O}_V \to \varphi_*(\mathcal{O}_U)$.

— Le sous-espace analytique $\varphi(U)$ est intègre en $\varphi(x)$. En effet, puisque x est le seul antécédent de $\varphi(x)$ par φ, $\mathcal{I}_{\varphi(x)}$ est le noyau du morphisme $\varphi^{\#} : \mathcal{O}_{V,\varphi(x)} \to \mathcal{O}_{U,x}$. C'est donc un idéal premier et donc $\mathcal{O}_{\varphi(U),\varphi(x)} \simeq \mathcal{O}_{V,\varphi(x)}/\mathcal{I}_{\varphi(x)}$ est intègre.

— Pour tout voisinage ouvert U' de x dans U, $\varphi(U')$ est un voisinage de $\varphi(x)$ dans $\varphi(U)$. En effet, soit V' un voisinage ouvert de $\varphi(x)$ dans V tel que $\varphi^{-1}(V')$ soit inclus dans U'. Le morphisme d'espaces analytiques $\varphi : \varphi^{-1}(V') \to V'$ est encore finie. L'ensemble $\varphi(\varphi^{-1}(V'))$ possède donc lui aussi naturellement une structure de sous-espace analytique de V' défini par le noyau $\mathcal{J}$ de $\varphi^{\#} : \mathcal{O}_{V'} \to \varphi_*(\mathcal{O}_{\varphi^{-1}(V')})$. On remarque que $\mathcal{J}_x$ est le noyau du morphisme $\varphi^{\#} : \mathcal{O}_{V',\varphi(x)} \to \mathcal{O}_{\varphi^{-1}(V'),x}$, il est donc égal à $\mathcal{I}_x$. Ce qui implique que, $\varphi(\varphi^{-1}(V'))$ est un voisinage de x dans $\varphi(U)$. Il en est donc de même de $\varphi(U')$.

Nous allons à présent séparer les deux cas évoqués dans l'énoncé.

Plaçons-nous dans le cas où le morphisme $\mathcal{O}_{B,b} \to \mathcal{O}_{X,x}$ est injectif. Nous allons montrer que φ est ouvert en x. D'après ce que nous venons de remarquer, il suffit de montrer que $\varphi(U)$ est un voisinage de $\varphi(x)$ dans V. Pour cela, nous allons raisonner par l'absurde.

Supposons que $\varphi(U)$ ne soit pas un voisinage de x dans V. Puisque c'est un sous-espace analytique de V, il existe $f \in \mathcal{I}_{\varphi(x)}$ un germe non nul. Puisque $\mathcal{O}_{B,b} \to \mathcal{O}_{X,x}$ est injectif, il en est de même de $\mathcal{O}_{B,b} \to \mathcal{O}_{\varphi(U),\varphi(x)}$ (ce sera toujours le cas si $\mathcal{O}_{B,b}$ est un corps).

Maintenant, si $\mathcal{O}_{B,b}$ est un corps fort, il en est de même de $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^k_{\mathcal{A}},x_k}$ et la proposition 5.6 assure que la fonction f est non nulle au voisinage de x si et seulement si sa restriction à $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^l_{\mathscr{H}(x_k)},\varphi(x)}$ est non nulle au voisinage de x.

De même si $\mathcal{O}_{B,b}$ est un anneau fortement de valuation discrète puisque le morphisme d'anneaux $\mathcal{O}_{B,b} \to \mathcal{O}_{\varphi(U),\varphi(x)}$ est injectif, π_b (l'uniformisante de $\mathcal{O}_{B,b}$) n'appartient pas à l'idéal de définition de $\varphi(U)$. De plus, le Lemme 9.14 de [Poi13] assure qu'il existe un couple $(\nu, g) \in \mathbb{N} \times \mathcal{O}_{V,\varphi(x)}$ tel que $f = \pi_b^\nu g$ dans $\mathcal{O}_{V,\varphi(x)}$ (où π_b est vu comme une uniformisante de $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^k_{\mathcal{A}},x_k}$) et g non nulle une fois restreinte à $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^l_{\mathscr{H}(x_k)},\varphi(x)}$. Or puisque π_b n'appartient pas à $\mathcal{I}_{\varphi(x)}$ et puisque cet idéal est premier cela implique que g lui appartient.

Ainsi, nous pouvons affirmer que s'il existe un germe appartenant à $\mathcal{I}_{\varphi(x)}$ non nul dans $\mathcal{O}_{V,\varphi(x)}$, nous pouvons en trouver un dont la restriction à $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^l_{\mathscr{H}(x_k)},\varphi(x)}$ est non nulle. Soit f un tel germe.

Le fait que $\varphi(U) \cap \mathbb{A}^l_{\mathscr{H}(x_k)}$ contienne un voisinage de $0_{x_k,k+l}$ dans $\mathbb{A}^l_{\mathscr{H}(x_k)}$ et que la fonction f soit nulle dans $\mathcal{O}_{\varphi(U),\varphi(x)}$, assure que f est nulle au voisinage de x. Cela contredit l'hypothèse faite sur f. Ainsi $\varphi(U)$ contient un voisinage de $0_{x_k,k+l}$ dans $\mathbb{A}^{k+l}_{\mathcal{A}}$. Nous avons donc montré que le morphisme $\varphi : U \to V$ est fini et ouvert en x.

Plaçons-nous maintenant dans le cas où le morphisme $\mathcal{O}_{B,b} \to \mathcal{O}_{X,x}$ n'est pas injectif. Comme nous l'avons remarqué plus haut, cela implique $\mathcal{O}_{B,b}$ est un anneau fortement de valuation discrète. On note V_b le sous-espace analytique de V défini par l'équation $\pi_b = 0$. Puisque $\varphi(U)$ est intègre en $\varphi(x)$ et puisque $\varphi^\# : \mathcal{O}_{\varphi(U),\varphi(x)} \to \mathcal{O}_{U,x}$ est injectif, la non injectivité de $\mathcal{O}_{B,b} \to \mathcal{O}_{X,x}$ implique que π_b appartient à $\mathcal{I}$. En particulier, quitte à rétrécir U et V, on peut supposer que $\varphi(U)$ est un sous-espace analytique de V_b. Le morphisme φ se factorise donc en $\varphi : U \to V_b$. Ainsi nous sommes ramené au cas où $\varphi(U)$ est un sous-espace analytique de l'ouvert V_b de $\mathbb{A}^{k+l}_{\mathscr{H}(b)}$.

Par construction de φ nous savons que $\varphi(U)$ est un voisinage de $\varphi(x)$ dans $V_b \cap \mathbb{A}^l_{\mathscr{H}(x_k)}$. Ainsi on peut effectuer le même raisonnement que précédement pour montrer que φ est ouvert en x.

Maintenant puisque U est intègre en x et puisque que V et V_b sont localement intègres, quitte à restreindre U et V, on peut affirmer que dans le cas où $\mathcal{O}_{B,b} \to \mathcal{O}_{X,x}$ est injectif φ est fini et ouvert et dans le cas où $\mathcal{O}_{B,b} \to \mathcal{O}_{X,x}$ n'est pas injectif le morphisme $\varphi : U \to V_b$ est fini et ouvert (voir proposition 6.10). $\square$

Avant de montrer la locale connexité des espaces analytiques au-dessus d'un anneau d'entiers de corps de nombres, montrons un résultat de topologie qui ne nous servira pas dans la suite mais qui peut être intéressant par lui même. Nous remercions Mattias Jonsson pour nous en avoir suggéré l'énoncé.

Soit X un espace $\mathcal{A}$-analytique. Si le morphisme naturel $\pi : X \to \mathcal{M}(\mathcal{A})$ est plat, nous dirons que X est plat.

Proposition 6.13. *Soit X un espace $\mathcal{A}$-analytique plat. Le morphisme $\pi : X \to \mathcal{M}(\mathcal{A})$ est ouvert.*

Démonstration de la proposition. Soient $x \in X$ et U un voisinage ouvert de x dans X. Il nous faut montrer que $\pi(U)$ est un voisinage de $\pi(x)$.

Quitte à remplacer U par un voisinage plus petit de x dans X, on peut supposer grâce à la proposition 6.9 que U est une union fini de sous-espaces analytiques (U_i) intègres en x. Pour montrer que $\pi(U)$ est un voisinage de $\pi(x)$, il suffit de montrer qu'il existe i tel que $\pi(U_i)$ vérifit la même propriété. Pour cela, nous allons montrer qu'il existe i tel que le morphisme naturel $\mathcal{O}_{\mathcal{M}(\mathcal{A}),\pi(x)} \to \mathcal{O}_{U_i,x}$ est injectif.

Si $\mathcal{O}_{\mathcal{M}(\mathcal{A}),\pi(x)}$ est un corps, il n'y a rien à montrer.

Supposons donc que $\mathcal{O}_{\mathcal{M}(\mathcal{A}),\pi(x)}$ est un anneau fortement de valuation discrète. Notons $\pi_{\pi(x)}$ une uniformisante de cet anneau. Il suffit de montrer qu'il existe i tel que l'image de $\pi_{\pi(x)}$ dans $\mathcal{O}_{U_i,x}$ est non nulle. Pour tout i, on note I_i le noyau du morphisme naturel $\mathcal{O}_{U,x} \to \mathcal{O}_{U_i,x}$. Si un germe $f \in \mathcal{O}_{U,x}$ appartient à l'intersection des I_i, il est nul ponctuellement au voisinage de x et donc il est nilpotent dans $\mathcal{O}_{U,x}$ (voir le théorème 5.13). Or puisque le morphisme $\mathcal{O}_{\mathcal{M}(\mathcal{A}),\pi(x)} \to \mathcal{O}_{U,x}$ est plat, l'image de $\pi_{\pi(x)}$ n'est pas nilpotente dans $\mathcal{O}_{U,x}$ et donc il existe i_0 tel que $\pi_{\pi(x)}$ n'appartienne pas à I_i. Ainsi $\mathcal{O}_{\mathcal{M}(\mathcal{A}),\pi(x)} \to \mathcal{O}_{U_i,x}$ est injectif.

Soit i_0 tel que le morphisme $\mathcal{O}_{\mathcal{M}(\mathcal{A}),\pi(x)} \to \mathcal{O}_{U_{i_0},x}$ est injectif.

Puisque U_{i_0} est intègre en x, le théorème 6.12 assure que quitte à remplacer U_{i_0} par un voisinage ouvert plus petit de x dans U_{i_0}, il existe un ouvert V d'un espace affine $\mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}$ et un morphisme ouvert d'espaces $\mathcal{A}$-analytiques $\varphi : U_{i_0} \to V$. Or nous savons grâce au corollaire 6.8 de [Poi13] que le morphisme naturel $\pi : V \to \mathcal{M}(\mathcal{A})$ est ouvert. Ainsi $\pi(U_{i_0})$ qui est égal à $\pi(\varphi(U_{i_0}))$ est un voisinage de $\pi(x)$. □

Nous allons maintenant déduire de ce résultat la connexité locale des espaces $\mathcal{A}$-analytiques pour $\mathcal{A}$ un anneau d'entiers de corps de nombres munit de sa norme usuelle.

Théorème 6.14. *Soient $\mathcal{A}$ un anneau d'entiers de corps de nombres et $(X, \mathcal{O}_X)$ un espace $\mathcal{A}$-analytique. L'espace topologique sous-jacent est localement connexe par arcs.*

Démonstration du théorème. Soit $x \in X$. La proposition 6.9 assure qu'il existe un voisinage W de x dans X et une famille finie de sous-espaces analytiques $(W_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ de W tels que x appartienne à W_i pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $W = \bigcup_{i=1}^n W_i$ et les W_i soient intègres en x.

Pour montrer l'énoncé, il suffit de montrer que pour tout i, x admet une base de voisinages connexes par arcs dans V_i. Nous avons donc ramené le problème au cas où X est intègre en x.

Soit U un voisinage de x dans X. Le théorème 6.12 assure que quitte à rétrécir U, on peut supposer que nous sommes dans l'un des deux cas suivants :

— il existe un morphisme fini, ouvert $\varphi : U \to V$ où V est un ouvert de $\mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}$;

— il existe un morphisme fini, ouvert $\varphi : U \to V$ où V est un ouvert de $\mathbb{A}^n_{\mathscr{H}(b)}$.

Or $\mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}$ et $\mathbb{A}^n_{\mathscr{H}(b)}$ sont localement connexes par arcs (le premier par le résultat 5.34, le second provient du Corollaire 2.2.8 et du Théorème 3.2.1 de [Ber90]). Ainsi quitte à rétrécir V (et U en conséquence), on peut supposer que dans les deux cas V est connexe et localement connexe par arcs. Cela implique qu'il est élastique (voir le premier point de l'exemple 5.23).

On déduit alors de la proposition 5.24 que U possède un nombre fini de composantes connexes et qu'elles sont connexes par arcs. On obtient ainsi le résultat souhaité. □

6.3 Dimension d'un espace analytique au-dessus d'un anneau d'entiers de corps de nombres

Dans cette section nous allons définir une notion de dimension d'espace analytique qui pourra notamment être utile pour calculer la cohomologie des faisceaux cohérents à l'aide de la cohomologie de Čech. Nous allons, pour cela, nous servir du théorème 6.12.

Sauf mention contraire $\mathcal{A}$ désignera un anneau d'entiers de corps de nombres tout au long de cette section.

Rappelons tout d'abord la définition de dimension de recouvrement d'un espace topologique.

Définition 6.15. Soient X un espace topologique et n un entier.

1. Soit $\mathcal{U}$ un recouvrement fini ouvert de x. Nous dirons que $\mathcal{U}$ est **d'ordre** n s'il est le plus grand entier i tel qu'il existe une famille de $i+1$ éléments de $\mathcal{U}$ dont l'intersection est non vide.
2. Nous dirons que X est de **dimension** n si tout recouvrement fini admet un raffinement fini d'ordre inférieur où égal à n. On notera $\dim_r(X)$ cet entier.

Le Théorème suivant qui est tiré de [Poi10] (voir Théorème 3.5.1) va permettre d'utiliser, sans trop d'hypothèses, cette notion de dimension de recouvrement. [1]

Théorème 6.16. *L'espace analytique $\mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}$ est séparable et métrisable.*

Rappelons quelques propriétés de la notion de dimension de recouvrement.

Théorème 6.17. *Soit X un espace topologique séparable et métrisable et M un sous ensemble de X. On a alors l'inégalité :*

$$\dim_r(X) \geq \dim_r(M).$$

Pour une démonstration de ce théorème voir 1.1.2 de [Eng95]. [2]

Théorème 6.18. *Soit X un espace séparable et métrisable et $(F_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une famille de sous-espaces topologiques fermés de X tel que $X = \bigcup_i F_i$ et $\dim_r(F_i) \leq n$ pour tout $i \in \mathbb{N}$. Nous avons alors l'inégalité :*

$$\dim_x(X) \leq n.$$

Pour une démonstration de ce théorème voir 1.5.3 de [Eng95].

Théorème 6.19. *Soient k un entier positif, X et Y deux espaces topologiques séparables métrisables et $f : X \to Y$ une application continue fermée tel que pour tout point y appartenant à Y, $\dim_r(f^{-1}(\{y\})) \leq k$. Nous avons alors l'inégalité :*

$$\dim_r(X) \leq \dim_r(Y) + k.$$

1. J. Poineau ne mentionne pas dans son énoncé le caractère séparable, cependant la démonstration du Théorème passe par la démonstration de ce fait.

2. Le Théorème originel (de même que les suivants) parle de dimension inductive faible mais dans le cas des espaces métriques séparables cette notion coïncide avec la dimension de recouvrement (voir le Théorème 1.7.7 de [Eng95]).

Pour une démonstration de ce théorème voir 1.12.4 de [Eng95].

Théorème 6.20. *Soit $\varphi : X \to Y$ une application continue ouverte entre espaces topologiques séparables métrisables tel que pour tout $y \in \varphi^{-1}(\{y\})$ soit discret dans X. On a l'égalité suivante* $\dim_r(X) = \dim_r(Y)$.

Pour une démonstration de ce théorème voir 1.12.7 de [Eng95].

Nous allons, maintenant, pouvoir montrer quelques résultats de dimensions de recouvrement des ouverts d'espaces affines. Le calcul est tout à fait analogue à celui des espaces affines eux mêmes (voir les Proposition 3.5.2 et 3.5.3 de [Poi10]), nous le redonnons cependant pour rendre la lecture plus fluide.

Proposition 6.21. *Soit U un ouvert non vide de $\mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}$. Il y a deux possibilités :*
- *si $\pi(U) \subset \mathcal{M}(\mathcal{A})_{um}$, $\dim_r(U) = n+1$;*
- *sinon $\dim_r(U) = 2n+1$.*

Démonstration de la proposition. Commençons par traiter le cas où $n = 0$. Soit U un ouvert non vide de $B := \mathcal{M}(\mathcal{A})$. On sait que B est une union dénombrable de sous-espaces topologiques fermés B_σ (où sigma parcours les différentes places du corps de nombres $\mathrm{Frac}(\mathcal{A})$) tous homéomorphes au segment $[0,1]$ (voir Corollaire 3.1.12 de [Poi10]). Ainsi le théorème 6.18 assure que la dimension de B est inférieure ou égale à la dimension de $[0,1]$. Maintenant, grâce au théorème 6.17 on peut affirmer que la dimension de U est inférieure ou égale à la dimension de B qui est elle même inférieure ou égale à la dimension de $[0,1]$ qui est égale à 1. Mais puisque U est non vide, il intersecte un des B_σ. Or tout ouvert de $[0,1]$ est de dimension 1, ainsi nous obtenons l'autre inégalité $1 = \dim_r(U \cap [0,1])$ est inférieure où égale à la dimension de U.

Passons maintenant au cas où n est non nul. Soit U un ouvert non vide de $\mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}$ tel que $\pi(U)$ est inclus dans B_{um}. On sait que $(\mathbb{A}^n_{\mathcal{A}})_{um}$ est une union dénombrable de polydisques $\overline{D}(k)_{um} := \{x \in (\mathbb{A}^n_{\mathcal{A}})_{um} | \ \forall i \in [\![1,n]\!] \ |T_i| \leq k\}$ où k parcourt les entiers strictement positifs. Puisque les ensembles $\overline{D}(k)_{um}$ sont compacts la projection $\pi : \overline{D}(k)_{um} \to B_{um}$ est propre. La proposition 1.2.18 de [Ber93] assure que pour tout $b \in B_{um}$ l'ensemble $\pi^{-1}(\{b\})$ est de dimension de recouvrement n. En utilisant le théorème 6.19, nous pouvons affirmer que la dimension de recouvrement de $\overline{D}(k)_{um}$ est inférieure ou égale $n+1$. Ainsi la dimension de U est inférieure ou égale à celle de $(\mathbb{A}^n_{\mathcal{A}})_{um}$ qui est inférieur ou égale à $n+1$.

Soit σ une place non archimédienne du corps de nombres $\mathrm{Frac}(\mathcal{A})$. Il existe un homéomorphisme $\varphi : B_\sigma \to [0,1]$ où B_σ est le sous-ensemble de B évoqué en début de preuve. On note B^*_σ la préimage de $]0,1[$ par φ. On pose $\mathbb{A}^n_\sigma := \{x \in \mathbb{A}^n_{\mathcal{A}} | \ \pi(x) \in B^*_\sigma\}$. La Proposition 3.4.1 de [Poi10] assure que $\mathbb{A}^n_\sigma$ est homéomorphe à $\mathbb{A}^n_{\mathscr{H}(b)} \times]0,1[$ où b est un point de B^*_σ. Puisque U est non vide et puisque $\pi(U)$ est ouvert non vide inclus dans B_{um}, il existe une place σ non archimédienne tel que $\mathbb{A}^n_\sigma \cap U$ soit non vide. L'ensemble $\mathbb{A}^n_\sigma \cap U$ est un ouvert de $\mathbb{A}^n_\sigma$, il donc de dimension supérieure ou égale à $n+1$ (on ce sert à ce moment que tout ouvert de $\mathbb{A}^n_{\mathscr{H}(b)}$ est de dimension n se qui découle une fois de plus de la proposition 1.2.18 de [Ber93]). La dimension de U est donc égale à $n+1$.

Supposons maintenant que U soit un ouvert non vide de $\mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}$ dont la projection $\pi(U)$ n'est pas inclus dans B_{um}. On sait que $\mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}$ est une union dénombrable de polydisques

$$\overline{D}(k) := \{x \in \mathbb{A}^n_{\mathcal{A}} | \, \forall i \in [\![1, n]\!] \; |T_i| \leq k\}$$

où k parcourt les entiers strictement positifs. Puisque les ensembles $\overline{D}(k)$ sont compacts la projection $\pi : \overline{D}(k) \to B$ est propre. La proposition 1.2.18 de [Ber93] assure que pour tout $b \in B_{um}$ l'ensemble $\pi^{-1}(\{b\})$ est de dimension de recouvrement n de même pour tout $b \in B \backslash B_{um}$, $\pi^{-1}(\{b\})$ est un polydisque de $\mathbb{C}^n$ si $\mathscr{H}(b)$ est le corps des complexes et de $\mathbb{C}^n / \sim$, où $\sim$ est la conjugaison complexe, si $\mathscr{H}(b)$ est le corps des réels, il est donc de dimension de recouvrement $2n$. Ainsi le théorème 6.19 assure que la dimension de recouvrement de $\overline{D}(k)$ est inférieure ou égale $2n+1$. Ce qui nous permet d'affirmer que la dimension de U est inférieure ou égale à celle de $\mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}$ qui est inférieure ou égale à $2n+1$.

Soit σ une place archimédienne du corps de nombres $\mathrm{Frac}(\mathcal{A})$. Il existe un homéomorphisme $\varphi : B_\sigma \to [0,1]$. On note B_σ^* la préimage de $]0,1]$ par φ. On note $\mathbb{A}^n_\sigma$ l'ensemble suivant $\{x \in \mathbb{A}^n_{\mathcal{A}} | \, \pi(x) \in B^*_\sigma\}$. La Proposition 3.4.2 de [Poi10] assure que $\mathbb{A}^n_\sigma$ est homéomorphe à $\mathbb{A}^n_{\mathscr{H}(b)} \times]0,1]$ où b est un point de B^*_σ. Puisque U est non vide, $\pi(U)$ est ouvert non vide qui n'est pas inclus dans B_{um} et donc il existe une place σ archimédienne tel que l'intersection $\mathbb{A}^n_\sigma \cap U$ soit non vide. L'ensemble $\mathbb{A}^n_\sigma \cap U$ est un ouvert de $\mathbb{A}^n_\sigma$, il donc de dimension supérieure ou égale à $2n+1$ (on se sert à ce moment que tout ouvert de $\mathbb{A}^n_{\mathscr{H}(b)}$ est de dimension $2n$). La dimension de U est donc égale à $2n+1$. ☐

Soient S et T deux sous-ensembles de $\mathcal{M}(\mathcal{A})$. Nous noterons $S \sim T$ si :
- $S \cap \mathcal{M}(\mathcal{A})_{um} \neq \emptyset$ si et seulement si $T \cap \mathcal{M}(\mathcal{A})_{um} \neq \emptyset$;
- $S \cap (\mathcal{M}(\mathcal{A}) \backslash \mathcal{M}(\mathcal{A})_{um}) \neq \emptyset$ si et seulement si $T \cap (\mathcal{M}(\mathcal{A}) \backslash \mathcal{M}(\mathcal{A})_{um}) \neq \emptyset$.

Corollaire 6.22. *Soit U un ouvert de $\mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}$ et V un ouvert de $\mathbb{A}^m_{\mathcal{A}}$. Si $\pi(V) \sim \pi(U)$ et si U et V ont même dimension de recouvrement alors $n = m$.*

Nous allons maintenant pouvoir donner une notion de dimension d'espace analytique en un point.

Soit X un espace analytique et x un point de X tel que $\mathcal{O}_{X,x}$ soit intègre. On pose b la projection sur la base $\pi(x)$. Le théorème 6.12 assure qu'il existe un entier n et un morphisme fini, ouvert $\varphi : U \to V$ où U est un voisinage ouvert de x dans X et V est un ouvert de $\mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}$ ou $\mathbb{A}^n_{\mathscr{H}(b)}$. Nous souhaitons dire que X est de dimension $n+1$ en x si V est un ouvert de $\mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}$ et de dimension n si V est un ouvert de $\mathbb{A}^n_{\mathscr{H}(b)}$. Pour cela, il nous faut montrer que cette entier est bien défini. C'est-à-dire que quelque soit le morphisme d'espaces analytiques fini, ouvert $\varphi' : U' \to V'$ où U' est un voisinage de x dans X et V' est un ouvert de $\mathbb{A}^{n'}_{\mathcal{A}}$ ou $\mathbb{A}^{n'}_{\mathscr{H}(b)}$, on a l'égalité $n = n'$ et V' est un ouvert de $\mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}$ si et seulement si V est un ouvert de $\mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}$.

Nous savons que $\varphi(x)$ admet une base de voisinages composée d'ouverts possédant tous la même dimension de recouvrement. Le théorème 6.20 assure qu'il en est de même pour x et qu'ils ont même dimension de recouvrement que celle des voisinages de $\varphi(x)$. Il en est aussi de même pour $\varphi'(x)$. Qui plus est, puisque $\varphi : U \to V$ et $\varphi' : U' \to V'$

sont des morphismes d'espaces $\mathcal{A}$-analytique, quitte à réduire U, U', V et V', nous avons les égalités $\pi(V) = \pi(U)$ et $\pi(V') = \pi(U')$. On conclut donc grâce à la proposition 6.22 que $n = n'$. De plus, en utilisant une fois de plus le fait $\pi(V) = \pi(U)$ et $\pi(V') = \pi(U')$, on conclut que V' est un ouvert de $\mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}$ si et seulement si V est un ouvert de $\mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}$.

Nous appellerons **dimension de X au point** x l'entier $n+1$ si V est un ouvert de $\mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}$ et n si V est un ouvert de $\mathbb{A}^n_{\mathscr{H}(b)}$. Nous noterons l'entier ainsi défini $\dim_x(X)$.

Maintenant si $\mathcal{O}_{X,x}$ n'est pas intègre la proposition 6.9 assure que l'on peut décomposer de manière unique un voisinage V de x dans X en sous-espaces analytiques V_i contenant x et intègre en ce point. Nous appellerons **dimension de X en** x le maximum des dimensions des V_i en x. Nous noterons encore cet entier $\dim_x(X)$.

Cela nous définit une fonction $\dim_{.}(X) : X \to \mathbb{N}$. On appellera **dimension de** X et on notera $\dim(X) \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ le *supremum* de cette fonction.

On déduit immédiatement de la construction la proposition suivante :

Proposition 6.23. *Soient X un espace analytique et x un point de X. Si (X_i) est une famille finie de sous-espaces analytiques de X contenant x et telle que X soit égal en tant qu'ensemble à l'union des X_i, on a l'égalité :*

$$\dim_x(X) = \max_i \dim_x(X_i).$$

6.4 Comparaison entre les propriétés d'un schéma et celle de son analytifié

Dans cette section nous allons démontrer quelques résultats classiques de comparaison entre propriétés d'un schéma et propriétés de l'espace analytique qui lui est associé. L'anneau $\mathcal{A}$ désignera un anneau de Banach géométrique général tout au long de cette section sauf dans le dernière énoncé où $\mathcal{A}$ sera un anneau d'entiers de corps de nombres.

Contrairement à tout le reste de cette thèse dans cette partie $\mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}$ désignera le schéma affine de dimension n et on notera $\mathbb{A}^{n,an}_{\mathcal{A}}$ l'espace analytique associé (qui est l'espace affine au sens où nous l'avons entendu auparavant).

Commençons par une première série de résultats de stabilités par passage à l'analytifié.

Par propriété universel du foncteur d'analytification, pour tout schéma X de type fini sur $\mathcal{A}$, il existe un morphisme canonique d'espaces localement annelés $\rho_X : X^{an} \to X$. Ce morphisme induit un foncteur $\rho_X^* : \mathrm{Mod}(X) \to \mathrm{Mod}(X^{an})$. Dans un but de concision nous noterons ce foncteur $.^{an} : \mathrm{Mod}(X) \to \mathrm{Mod}(X^{an})$. Remarquons aussi que ce foncteur respecte les faisceaux cohérents.

Remarquons, en premier lieu, que l'ensemble $(\mathbb{P}^n_{\mathcal{A}})^{an}$ est compact. Il suffit pour cela de remarquer que c'est un espace topologique séparé qui s'écrit comme une réunion finie de disques fermés de rayon 1.

Nous allons montrer quelques énoncés de stabilité par passage à l'analytifié.

Proposition 6.24. *Soit $\varphi : X \to Y$ un morphisme entre schémas de type fini sur $\mathcal{A}$. Si le morphisme φ est (1) une immersion (resp. immersion fermée, resp.immersion ouverte)*

(2) surjectif, (3) propre, (4) fini alors le morphisme φ^{an} possède la même propriété. [3]

Démonstration de la proposition. Dans toute cette démonstration nous noterons :

$$\rho_X : X^{an} \to X \text{ et } \rho_Y : Y^{an} \to Y$$

les morphismes naturels d'espaces localement annelés. Nous avons donc le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} X^{an} \arrow[r, "\varphi^{an}"] \arrow[d, "\rho_X"] & Y^{an} \arrow[d, "\rho_Y"] \\ X \arrow[r, "\varphi"] & Y \end{tikzcd}.$$

Commençons par remarquer le fait suivant : Soit $y \in Y^{an}$. Il y a un isomorphisme entre les espaces $\mathscr{H}(y)$-analytiques $(\varphi^{an})^{-1}(\{y\})$ et $(X_{\rho_Y(y)} \otimes_{k(\rho_Y(y))} \mathscr{H}(y))^{an}$. Cela découle de la proposition 4.17 et du fait que le foncteur d'analytification soit un adjoint à gauche et donc commute au produit fibré.

(1) Les trois énoncés découlent de la construction du foncteur d'analytification.

(2) Si φ est surjectif, pour tout $y \in Y^{an}$, l'ensemble $X_{\rho_Y(y)}$ est non vide, ainsi l'espaces $\mathscr{H}(y)$-analytiques $(\varphi^{an})^{-1}(\{y\}) \simeq (X_{\rho_Y(y)} \otimes_{k(\rho_Y(y))} \mathscr{H}(y))^{an}$ l'est lui aussi (cela provient du même résultat sur un corps non archimédien et sur $\mathbb{C}$).

(3) Si φ est propre le Lemme de Chow (voir Corollaire 5.6.2 de [Gro61]) assure qu'il existe un Y-schéma projectif X' et un morphisme projectif de Y-schémas $X' \to X$. Pour montrer le résultat, il suffit donc de montrer que si φ est projectif, φ^{an} est propre.

Soit $\varphi : X \to Y$ un morphisme projectif de schémas. Quitte à rétrécir X et Y, on peut supposer que φ se factorise en la composition d'une immersion fermée $X \to \mathbb{P}^n_{\mathcal{A}} \times Y$ avec la projection $\mathbb{P}^n_{\mathcal{A}} \times Y \to Y$. Nous avons déjà remarqué que l'espace analytique $(\mathbb{P}^n_{\mathcal{A}})^{an}$ est compact, donc la projection $(\mathbb{P}^n_{\mathcal{A}})^{an} \to B := \mathcal{M}(\mathcal{A})$ est propre. La proposition 5.10 assure donc que la projection $Y^{an} \times (\mathbb{P}^n_{\mathcal{A}})^{an} \to Y^{an}$ est un morphisme propre. De plus, par le point (1) de cette proposition le morphisme $X^{an} \to (\mathbb{P}^n_{\mathcal{A}})^{an} \times Y^{an}$ est une immersion fermée. Ainsi φ est propre comme composition de morphismes propres.

(4) Si φ est un morphisme fini, d'après le point précédent φ^{an} est propre. Il suffit donc de remarquer que $(X_{\rho_Y(y)} \otimes_{k(\rho_Y(y))} \mathscr{H}(y))^{an}$ est un ensemble fini si $X_{\rho_Y(y)}$ l'est aussi (voir par exemple la Proposition 3.4.7(4) de [Ber90] pour le cas où y est non archimédien et la proposition 3.2 de l'exposé XII de [SGA03]) pour montrer l'énoncé. □

Nous allons maintenant montrer l'existence d'un isomorphisme qui va nous servir à montrer d'autres énoncés de stabilité par passage à l'analytifié. Soient $\varphi : X \to Y$ un morphisme de schémas de type fini sur $\mathcal{A}$ et $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent sur X. De la même manière que dans la proposition 5.12 le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} X^{an} \arrow[r, "\varphi^{an}"] \arrow[d, "\rho_X"] & Y^{an} \arrow[d, "\rho_Y"] \\ X \arrow[r, "\varphi"] & Y \end{tikzcd}$$

3. Il est probable que les implications de cette proposition soient des équivalences. Nous n'en donnons cependant pas de démonstration ici.

induit un morphisme de faisceaux $(\varphi_*(\mathcal{F}))^{an} \to \varphi_*^{an}(\mathcal{F}^{an})$. Ce morphisme n'est pas en général un isomorphisme, mais nous avons cependant la proposition suivante :

Proposition 6.25. *Soient $\varphi : X \to Y$ un morphisme fini de schémas de type fini sur $\mathcal{A}$ et $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent sur X. Alors le morphisme naturel*

$$(\varphi_*(\mathcal{F}))^{an} \to \varphi_*^{an}(\mathcal{F}^{an})$$

est un isomorphisme.

Démonstration de la proposition. La question étant locale sur Y, on peut supposer que Y est un schéma affine. De plus, par définition de morphisme fini de schéma cela implique que X est lui aussi un schéma affine. Le morphisme $\varphi : X \to Y$ correspond donc à un morphisme d'anneaux $\varphi^\# : A \to B$ où $X = \mathrm{Spec}(B)$ et $Y = \mathrm{Spec}(A)$ qui donne à B une structure de A-module de type fini. Soit $A[T_1, \ldots, T_k] \to B$ une surjection de A-algèbres.

Nous allons montrer l'énoncé souhaité par récurrence sur k.

Si $k = 0$, $\varphi : X \to Y$ est une immersion fermée l'assertion (1) de la proposition 6.24 assure que $\varphi^{an} : X^{an} \to Y^{an}$ est aussi une immersion fermée, il n'y a donc rien à montrer.

Supposons que nous ayons montré l'énoncé pour $k \in \mathbb{N}$, et montrons le pour $k + 1$. Soit $A[T_1, \ldots, T_{k+1}] \to B$ la surjection évoquée plus haut. On note B_k la sous-algèbre de B définie par l'image de $A[T_1, \ldots, T_k]$ dans B par cette surjection. On pose $X_k := \mathrm{Spec}(B_k)$. L'inclusion $B_k \to B$ induit un morphisme de schéma $\psi_k : X \to X_k$. Nous avons donc le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, hook] \arrow[d, "\psi_k"] \arrow[rr, bend left, "\varphi"] & Y \times \mathbb{A}_{\mathcal{A}}^{k+1} \arrow[r] \arrow[d, "p_{k+1,k}"'] & Y \\
X_k \arrow[r, hook] & Y \times \mathbb{A}_{\mathcal{A}}^{k} \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

où les morphismes $X \to Y \times \mathbb{A}_{\mathcal{A}}^{k+1}$ et $X_k \to Y \times \mathbb{A}_{\mathcal{A}}^{k}$ sont des immersions fermées et le morphisme $p_{k+1,k} : Y \times \mathbb{A}_{\mathcal{A}}^{k+1} \to Y \times \mathbb{A}_{\mathcal{A}}^{k}$ est la projection sur les k premiers facteurs. Soit $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent sur X. Par hypothèse de récurrence, il suffit de montrer que le morphisme naturel

$$((\psi_k)_*(\mathcal{F}))^{an} \to (\psi_k)_*^{an}(\mathcal{F}^{an})$$

est un isomorphisme (voir la remarque avant la démonstration de 5.12). Par construction, il existe une surjection $B_k[T] \to B$. Puis que B est un B_k-module de type fini, il existe un polynôme unitaire $P \in B_k[T]$ tel que la surjection se factorise par $B_k[T]/(P) \to B$. Soit $\mathcal{A}[T_1, \ldots, T_n] \to B_k$ une surjection (attention à ne pas confondre avec la surjection $A[T_1, \ldots, T_k] \to B_k$). On note encore P un relèvement unitaire de P à $\mathcal{A}[T_1, \ldots, T_n][T]$ et $\{P = 0\}$ le sous-schéma fermé de $\mathbb{A}_{\mathcal{A}}^{n+1}$ induit par P. Nous avons donc le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, hook] \arrow[d, "\psi_k"] & \{P=0\} \arrow[d, "p_{n+1,n}"] \\ X_k \arrow[r, hook] & \mathbb{A}^n_{\mathcal{A}} \end{tikzcd}$$

où les morphismes $X \to \{P = 0\}$ et $X_k \to \mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}$ sont des immersions fermée et le morphisme $p_{n+1,n} : \{P = 0\} \to \mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}$ est la restriction à $\{P = 0\}$ de la projection sur les n premiers facteurs. Puisque le morphisme correspondant $X_k \to \mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}$ est une immersion fermée, il suffit de montrer que pour tout faisceau cohérent sur $\mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}$ le morphisme naturel

$$((p_{n+1,n})_*(\mathcal{F}))^{an} \to (p_{n+1,n})^{an}_*(\mathcal{F}^{an})$$

est un isomorphisme.

Mais dans ce cas là un calcul direct assure grâce au lemme 5.7 que le morphisme évoqué dans le proposition est un isomorphisme. □

À partir de maintenant $\mathcal{A}$ sera un anneau appartenant à la liste suivante :

— un anneau d'entiers de corps de nombres munit de la norme usuelle ou de la norme triviale ;

— un corps valué complet (archimédien ou non) ;

— un corps valué complet munit de la norme correspondant au maximum entre sa valuation et la norme triviale.

Le fait suivant est très utile quand il s'agit de comparer les propriétés d'un schéma et celles de l'espace analytique associé.

Théorème 6.26. *Soit X un schéma de type fini sur $\mathcal{A}$. Le morphisme naturel d'espaces localement annelés $\rho_X : X^{an} \to X$ est fidèlement plat i.e. pour tout $x \in X^{an}$ le morphisme $\rho_X^{\#} : \mathcal{O}_{X,\rho_X(x)} \to \mathcal{O}_{X^{an},x}$ est plat.*

Avant de démontrer ce théorème commençons par un cas particulier.

Proposition 6.27. *On note $\rho : \mathbb{A}^{n,an}_{\mathcal{A}} \to \mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}$ le morphisme naturel d'espaces localement annelés. Soit $x \in \mathbb{A}^{n,an}_{\mathcal{A}}$. Le morphisme $\rho^{\#} : \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_{\mathcal{A}},\rho(x)} \to \mathcal{O}_{\mathbb{A}^{n,an}_{\mathcal{A}},x}$ est plat.*

Démonstration de la proposition. Nous allons montrer cet énoncé par récurrence sur n.

Si $n = 0$, il existe un idéal premier P de $\mathcal{A}$ tel que $\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(\mathcal{A}),\rho(x)} = \mathcal{A}_P$ (le localisé de $\mathcal{A}$ par rapport à P). Pour $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^{n,an}_{\mathcal{A}},x}$, il y a deux possibilités :

— si $\mathcal{A}_P$ n'est pas un corps alors $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^{n,an}_{\mathcal{A}},x}$ est la complétion de $\mathcal{A}_P$ pour la topologie P-adique ;

— si $\mathcal{A}_P$ est un corps alors $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^{n,an}_{\mathcal{A}},x}$ est une extension de $\mathcal{A}_P$.

Dans le premier cas la proposition IV 3.1 de [SGA03] assure que $\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(\mathcal{A}),\rho(x)} \to \mathcal{O}_{\mathcal{M}(\mathcal{A}),x}$ est plat. Dans le second, cela découle du fait que $\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(\mathcal{A}),\rho(x)}$ est un corps.

Supposons que nous ayons démontré l'énoncé pour $n \in \mathbb{N}$, montrons le pour $n + 1$.

Soit $x \in \mathbb{A}_{\mathcal{A}}^{n+1,an}$. On note P l'idéal premier de $\mathcal{A}$ correspondant à la projection de $\rho(x)$ sur $\mathrm{Spec}(\mathcal{A})$. Le point $\rho(x)$ correspond à un idéal premier de $\mathrm{Frac}(\mathcal{A}/P)[T_1, \dots, T_{n+1}]$. Nous allons une fois de plus séparer l'étude en deux cas.

Plaçons-nous dans le cas où $\rho(x)$ correspond à l'idéal nul de $\mathrm{Frac}(\mathcal{A}/P)[T_1, \dots, T_{n+1}]$. Dans ce cas $\mathcal{O}_{\mathbb{A}_{\mathcal{A}}^{n+1},\rho(x)}$ n'est autre que l'anneau $\mathcal{A}[T_1, \dots, T_{n+1}]_P$. Si P est l'idéal nul l'anneau $\mathcal{O}_{\mathbb{A}_{\mathcal{A}}^{n+1},\rho(x)}$ est un corps et donc $\mathcal{O}_{\mathbb{A}_{\mathcal{A}}^{n+1,an},x}$ est une $\mathcal{O}_{\mathbb{A}_{\mathcal{A}}^{n+1},\rho(x)}$-algèbre plate. Si P n'est pas l'idéal nul $\mathcal{O}_{\mathbb{A}_{\mathcal{A}}^{n+1},\rho(x)} \simeq \mathcal{A}[T_1, \dots, T_{n+1}]_P$ est principal. Mais on sait que $\mathcal{O}_{\mathbb{A}_{\mathcal{A}}^{n+1,an},x}$ est intègre (il est même régulier d'après le théorème 9.18 de [Poi13]) et que le morphisme $\mathcal{O}_{\mathbb{A}_{\mathcal{A}}^{n+1},\rho(x)} \to \mathcal{O}_{\mathbb{A}_{\mathcal{A}}^{n+1,an},x}$ est injectif (cela découle du principe de prolongement analytique). Ainsi $\mathcal{O}_{\mathbb{A}_{\mathcal{A}}^{n+1,an},x}$ est sans torsion comme $\mathcal{O}_{\mathbb{A}_{\mathcal{A}}^{n+1},\rho(x)}$-module. La proposition IV 1.3 de [SGA03] assure que $\mathcal{O}_{\mathbb{A}_{\mathcal{A}}^{n+1,an},x}$ est une $\mathcal{O}_{\mathbb{A}_{\mathcal{A}}^{n+1},\rho(x)}$-algèbre plate.

Plaçons-nous maintenant dans le cas où $\rho(x)$ ne correspond pas à l'idéal nul de l'anneau de polynôme $\mathrm{Frac}(\mathcal{A}/P)[T_1, \dots, T_{n+1}]$. On note Π l'idéal de $\mathrm{Frac}(\mathcal{A}/P)[T_1, \dots, T_{n+1}]$ correspondant à $\rho(x)$. Quitte à échanger les variables on peut supposer qu'il existe $k \in [\![0, n]\!]$ tel l'intersection de Π avec $\mathrm{Frac}(\mathcal{A}/P)[T_1, \dots, T_k] \subset \mathrm{Frac}(\mathcal{A}/P)[T_1, \dots, T_{n+1}]$ est l'idéal nul et tel que $k(\rho(x))$ soit une extension finie de $\mathrm{Frac}(\mathcal{A}/P)(T_1, \dots, T_k)$. On note $\rho(x)_n$ la projection de $\rho(x)$ sur les n premières variables (qui est égale l'image par le morphisme d'analytfication de la projection sur les n premières variables de x que l'on notera x_n). Grâce au changement de variables que nous venons d'effectuer nous savons que le morphisme naturel $k(\rho(x)_n)[T_{n+1}] \to k(\rho(x))$ n'est pas injectif. On note P_{n+1} un générateur de son noyau et d le degré de ce polynôme. Soient $\tilde{P}_{n+1}$ un relèvement unitaire de P_{n+1} à $\mathcal{O}_{\mathbb{A}_{\mathcal{A}}^{n},\rho(x)_n}[T_{n+1}] \simeq \mathcal{A}[T_1, \dots, T_n]_{\Pi_n}[T_{n+1}]$ de même degré et $U := \mathrm{Spec}(B)$ un voisinage affine de $\rho(x)_n$ dans $\mathbb{A}_{\mathcal{A}}^n$ sur lequel chacun des coefficients de ce polynôme est défini.

Nous allons maintenant procéder de la même manière que dans la section 3.3. Soit Z le sous-schéma fermé de $\mathbb{A}_B^2$ défini par le polynôme $\tilde{P}_{n+1}(S) - T$ où S et T sont les deux fonctions coordonnés de $\mathbb{A}_B^2$. Nous disposons d'un morphisme $\varphi_{(\tilde{P}_{n+1},T)} : \mathbb{A}_B^1 \to \mathbb{A}_B^2$ correspondant au morphisme de B-algèbres :

$$\begin{array}{rcl} B[T,S] & \to & B[T] \\ T & \mapsto & \tilde{P}_{n+1} \\ S & \mapsto & T \end{array}.$$

Ce morphisme induit un isomorphisme de schéma entre $\mathbb{A}_B^1$ et le sous-schéma fermé Z de $\mathbb{A}_B^2$. De même que dans le cas analytique décrit dans la section 3.3, on obtient un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[d, shift left, "p_2"] \arrow[dr, "p_1"] & \\ \mathbb{A}_B^1 \arrow[u, bend left, "\varphi_{(\tilde{P}_{n+1},T)}"] \arrow[r, "\varphi_{\tilde{P}_{n+1}}"'] & \mathbb{A}_B^1 \end{tikzcd} .$$

où $\varphi_{\tilde{P}_{n+1}} : \mathbb{A}^1_B \to \mathbb{A}^1_B$ est le morphisme de schémas induit par le morphisme d'algèbres

$$\begin{array}{rcl} B[T] & \to & B[T] \\ T & \mapsto & \tilde{P}_{n+1} \end{array},$$

le morphisme p_1 est la restriction à Z de la projection sur la variable T et le morphisme p_2 est la restriction à Z de la projection sur la variable S.

Considérons les deux morphismes naturels :

$$\begin{array}{rccl} \psi : & \mathcal{O}^d_{\mathbb{A}^1_B} & \to & (p_1)_*(\mathcal{O}_Z) \\ & (a_0, \dots, a_{d-1}) & \mapsto & \sum_{i=0}^{d-1} a_i(T) S^i \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rccl} \varphi^{\#}_{(\tilde{P}_{n+1},T)} : & (p_1)_*(\mathcal{O}_Z) & \to & (p_1)_* \left((\varphi_{(\tilde{P}_{n+1},T)})_* \left(\mathcal{O}_{\mathbb{A}^1_B} \right) \right) \simeq (\varphi_{\tilde{P}_{n+1}})_* \left(\mathcal{O}_{\mathbb{A}^1_B} \right) \\ & f & \mapsto & \varphi^{\#}_{(\tilde{P}_{n+1},T)}(f) \end{array}.$$

Le morphisme ψ est un isomorphisme. En effet, sur les sections globales, le morphisme induit est

$$\begin{array}{rccl} \psi : & B[T]^d & \to & B[T,S]/(\tilde{P}_{n+1}(S) - T) \\ & (a_0, \dots, a_{d-1}) & \mapsto & \sum_{i=0}^{d-1} a_i(T) S^i \end{array}.$$

Ce morphisme est manifestement un isomorphisme. De même, le morphisme de faisceaux $\varphi^{\#}_{(\tilde{P}_{n+1},T)} : (p_1)_*(\mathcal{O}_Z) \to (\varphi_{\tilde{P}_{n+1}})_* \left(\mathcal{O}_{\mathbb{A}^1_B} \right)$ est un isomorphisme. En effet, une fois de plus sur les sections globales, le morphisme induit est

$$\begin{array}{rccl} \varphi^{\#}_{(\tilde{P}_{n+1},T)} : & B[T,S]/(\tilde{P}_{n+1}(S) - T) & \to & B[T] \\ & \sum_{i=0}^{d-1} a_i(T) S^i & \mapsto & \sum_{i=0}^{d-1} a_i(\tilde{P}_{n+1}) T^i \end{array}.$$

Ce dernier morphisme est lui aussi manifestement un isomorphisme.

On pose $\psi_{\tilde{P}_{n+1}} := \varphi^{\#}_{(\tilde{P}_{n+1},T)} \circ \psi : \mathcal{O}^d_{\mathbb{A}^1_B} \to (\varphi_{\tilde{P}_{n+1}})_* \left(\mathcal{O}_{\mathbb{A}^1_B} \right)$. C'est un morphisme qui pour tout ouvert V de $\mathbb{A}^1_B$ envoie le d-uplet $(a_0, \dots, a_{d-1}) \in \mathcal{O}^d_{\mathbb{A}^1_B}(V)$ sur le polynôme $\sum_{i=0}^{d-1} \varphi^{\#}_{\tilde{P}_{n+1}}(a_i) T^i \in \mathcal{O}_{\mathbb{A}^1_B}(\varphi^{-1}_{\tilde{P}_{n+1}}(V))$ (où T désigne la fonction coordonnée de $\mathbb{A}^1_B$). Ce morphisme est un isomorphisme comme composé de deux isomorphismes.

On note $0_{x_n,n+1}$ le point correspondant à l'idéal (T_{n+1}) au-dessus de x_n dans $\mathbb{A}^{n+1,an}_{\mathcal{A}}$. Par construction, le point $\rho(0_{x_n,n+1})$ n'a que $\rho(x)$ comme antécédent par $\varphi_{\tilde{P}_{n+1}}$. Ainsi le morphisme $\psi_{\tilde{P}_{n+1}}$ induit un isomorphisme entre les germes

$$\psi_{\tilde{P}_{n+1}} : \mathcal{O}^d_{\mathbb{A}^1_B, \rho(0_{x_n,n+1})} \to (\varphi_{\tilde{P}_{n+1}})_* \left(\mathcal{O}_{\mathbb{A}^1_B} \right)_{\rho(0_{x_n,n+1})} \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{A}^1_B, \rho(x)}.$$

En appliquant le foncteur d'analytification au morphisme $\psi_{\tilde{P}_{n+1}}$ et en utilisant la proposition 6.25, nous obtenons le morphisme $\psi_{\tilde{P}_{n+1}} : \mathcal{O}^d_{\mathbb{A}^{1,an}_{\mathcal{A}} \times U^{an}} \to (\varphi^{an}_{\tilde{P}_{n+1}})_* \left(\mathcal{O}_{\mathbb{A}^{1,an}_{\mathcal{A}} \times U^{an}}\right)$. Par construction, lorsque l'on regarde le morphisme qu'il induit entre les germes au voisinage de 0_{x_n}, $\psi_{\tilde{P}_{n+1}} : \mathcal{O}^d_{\mathbb{A}^{1,an}_{\mathcal{A}} \times U^{an}, 0_{x_n,n+1}} \to (\varphi^{an}_{\tilde{P}_{n+1}})_* \left(\mathcal{O}_{\mathbb{A}^{1,an}_{\mathcal{A}} \times U^{an}}\right)_{0_{x_n,n+1}}$ on obtient le même morphisme que celui évoqué dans la section 3.3. Ce dernier morphisme est donc un isomorphisme (voir le théorème 3.14). Mais par choix de morphisme x est un antécédent de $0_{x_n,n+1}$ par $\varphi^{an}_{\tilde{P}_{n+1}}$. Ainsi $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^{1,an}_{\mathcal{A}} \times U^{an}, x}$ est un sommant de $(\varphi^{an}_{\tilde{P}_{n+1}})_* \left(\mathcal{O}_{\mathbb{A}^{1,an}_{\mathcal{A}} \times U^{an}}\right)_{0_{x_n,n+1}}$. Donc pour montrer que $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^1_B, \rho(x)} \to \mathcal{O}_{\mathbb{A}^{1,an}_{\mathcal{A}} \times U^{an}, x}$ est plat, il suffit de montrer que le morphisme d'anneaux locaux $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^1_B, \rho(x)} \to (\varphi^{an}_{\tilde{P}_{n+1}})_* \left(\mathcal{O}_{\mathbb{A}^{1,an}_{\mathcal{A}} \times U^{an}}\right)_{0_{x_n,n+1}}$ l'est.

En mettant ensemble ces deux isomorphismes, on obtient le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}^d_{\mathbb{A}^{1,an}_{\mathcal{A}} \times U^{an}, 0_{x_n,n+1}} \arrow[r, "\psi_{\tilde{P}_{n+1}}"] & (\varphi^{an}_{\tilde{P}_{n+1}})_* \left(\mathcal{O}_{\mathbb{A}^{1,an}_{\mathcal{A}} \times U^{an}}\right)_{0_{x_n,n+1}} \\
\mathcal{O}^d_{\mathbb{A}^1_B, \rho(0_{x_n,n+1})} \arrow[u] \arrow[r, "\psi^{an}_{\tilde{P}_{n+1}}"] & \mathcal{O}_{\mathbb{A}^1_B, \rho(x)} \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

où les deux morphismes horizontaux sont des isomorphismes. Il suffit donc de montrer que le morphisme $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^1_B, \rho(0_{x_n,n+1})} \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{A}^{n+1}_{\mathcal{A}}, \rho(0_{x_n})} \to \mathcal{O}_{\mathbb{A}^{n+1,an}_{\mathcal{A}}, 0_{x_n}} \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{A}^{1,an}_{\mathcal{A}} \times U^{an}, 0_{x_n,n+1}}$ est plat.

Mais pour montrer ce dernier fait, il suffit de montrer que le morphisme d'anneaux locaux $\widehat{\mathcal{O}_{\mathbb{A}^{n+1}_{\mathcal{A}}, \rho(0_{x_n})}} \to \widehat{\mathcal{O}_{\mathbb{A}^{n+1,an}_{\mathcal{A}}, 0_{x_n}}}$ où les chapeaux désignent la complétion par rapport à l'idéal (T_{n+1}), est plat (voir par exemple le Corollaire IV 3.2 de [SGA03]). Or ces deux algèbres sont respectivement isomorphes à $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}, \rho(x_n)}[[T_{n+1}]]$ et $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^{n,an}_{\mathcal{A}}, x_n}[[T_{n+1}]]$ (cela provient du Corollaire 2.8 de [Poi13]), le morphisme $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}, \rho(x_n)}[[T_{n+1}]] \to \mathcal{O}_{\mathbb{A}^{n,an}_{\mathcal{A}}, x_n}[[T_{n+1}]]$ est donc plat par hypothèse de récurrence [4].

On conclut donc que $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}, \rho(x)} \to \mathcal{O}_{\mathbb{A}^{n,an}_{\mathcal{A}}, x}$ est plat. □

Démonstration du théorème. Soit $x \in X^{an}$. Le morphisme $\rho^{\#}_X : \mathcal{O}_{X, \rho_X(x)} \to \mathcal{O}_{X^{an}, x}$ ne dépendant que localement du schéma X, nous pouvons supposer que X est un sous-schéma fermé d'un espace affine $\mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}$ défini par un idéal I. Il suffit alors de remarquer que, par construction, $\mathcal{O}_{X^{an}, x}$ est isomorphe à $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^{n,an}_{\mathcal{A}}, x} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}, \rho(x)}} \mathcal{O}_{X, \rho_X(x)}$. Ainsi par fidèle platitude de $\rho^{\#} : \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}, \rho(x)} \to \mathcal{O}_{\mathbb{A}^{n,an}_{\mathcal{A}}, x}$ le morphisme $\rho^{\#}_X : \mathcal{O}_{X, \rho_X(x)} \to \mathcal{O}_{X^{an}, x}$ est fidèlement plat. □

Donnons maintenant un autre énoncé de stabilité de propriété par passage à l'analytification.

Proposition 6.28. *Soit $\varphi : X \to Y$ un morphisme fini entre schémas de type fini sur $\mathcal{A}$. Si φ est sans torsion (c'est-à-dire que pour tout $y \in Y$, $\varphi_*(\mathcal{O}_X)_y$ est un $\mathcal{O}_{Y,y}$-module sans torsion) ou plat, il en est de même de φ^{an}.* [5]

4. Si $B \to C$ est un morphisme plat entre anneaux noethériens, par changement de base le morphisme $B[T] \to C[T]$ est lui aussi plat. En suite, en utilisant la proposition Ch III 5.4.4 de [Bou61], on obtient qu'il en est de même de $B[[T]] \to C[[T]]$ par passage au complété pour la topologie T-adique.

5. De la même manière que dans laproposition 6.24, il est probable que les implications de cette proposition soient en réalité des équivalences.

De plus, si X est un schéma de type fini plat sur $\mathcal{A}$, X^{an} est lui aussi un espace analytique plat.

Démonstration de la proposition. Les deux énoncés découlent des deux propositions 6.24, 6.25 et du théorème 6.26.

Dans les deux cas l'assertion (4) de la proposition 6.24 assure que φ^{an} est lui aussi un morphisme fini.

Supposons que φ soit sans torsion. Soit $y \in Y^{an}$. La proposition 6.25 assure que le morphisme naturel $\mathcal{O}_{Y^{an},y} \otimes_{\mathcal{O}_{Y,\rho_Y(y)}} \varphi_*(\mathcal{O}_X)_{\rho_Y(y)} \to \varphi_*^{an}(\mathcal{O}_{X^{an}})_y$ est un isomorphisme. De plus, le théorème 6.26 permet d'affirmer que $\mathcal{O}_{Y,\rho_Y(y)} \to \mathcal{O}_{Y^{an},y}$ est un morphisme plat. Ainsi pour montrer que $\varphi_*^{an}(\mathcal{O}_{X^{an}})_y$ est sans torsion comme $\mathcal{O}_{Y^{an},y}$-module, il suffit de montrer le lemme d'algèbre suivant :

Lemme 6.29. *Soit $A \to B$ un morphisme plat d'anneau noethérien et M un A-module de type fini sans torsion. Alors $M \otimes_A B$ est un B-module sans torsion.*

Démonstration du lemme. Puisque le A-module M est sans torsion, le morphisme

$$\begin{array}{rcl} A & \to & \mathrm{Hom}_{\mathrm{Mod}(A)}(M, M) \\ a & \mapsto & a\cdot : M \to M \end{array}$$

est injectif. Or puisque $A \to B$ est plat, le morphisme $B \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{Mod}(A)}(M, M) \otimes_A B$ est lui aussi injectif. Maintenant le fait que M soit de type fini et que $A \to B$ soit un morphisme plat entre anneau noethérien, assure que le morphisme naturel

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Hom}_{\mathrm{Mod}(A)}(M, M) \otimes_A B & \to & \mathrm{Hom}_{\mathrm{Mod}(B)}(M \otimes_A B, M \otimes_A B) \\ (\varphi, b) & \mapsto & \varphi \otimes (b \cdot Id_B) \end{array}$$

est un isomorphisme.

Ainsi le morphisme $B \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{Mod}(B)}(M \otimes_A B, M \otimes_A B)$ est injectif et donc $M \otimes_A B$ est un B-module sans torsion. $\square$

Supposons maintenant que φ soit un morphisme plat. Puisque φ est fini et plat $\varphi_*(\mathcal{O}_X)$ est un $\mathcal{O}_Y$-module localement libre. Soit U un ouvert de Y sur lequel $\varphi_*(\mathcal{O}_X)$ est libre. En utilisant une fois de plus la proposition 6.25, on constate que le $\mathcal{O}_{Y^{an}}$-module $\varphi_*^{an}(\mathcal{O}_{X^{an}})$ qui est isomorphe à $(\varphi_*(\mathcal{O}_X))^{an}$ est libre sur $\rho_Y^{-1}(U)$. Il est donc plat.

Passons enfin au dernier point. Soient X un schéma de type fini plat sur $\mathcal{A}$ et $x \in X^{an}$. Il nous faut montrer que le morphisme $\mathcal{O}_{\mathcal{M}(\mathcal{A}),\pi(x)} \to \mathcal{O}_{X^{an},x}$ est plat.

Si $\mathcal{O}_{\mathcal{M}(\mathcal{A}),\pi(x)}$ est un corps, il n'y a rien à montrer.

Supposons que $\mathcal{O}_{\mathcal{M}(\mathcal{A}),\pi(x)}$ est un anneau fortement de valuation discrète. Dans les cas que nous considérons (les anneaux d'entiers de corps de nombres) cela implique que $\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(\mathcal{A}),\rho(\pi(x))}$ est aussi un anneau de valuation discrète. Soit $\pi_{\pi(x)}$ une uniformisante de $\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(\mathcal{A}),\rho(\pi(x))}$. Son image dans $\mathcal{O}_{\mathcal{M}(\mathcal{A}),\pi(x)}$ en est aussi une uniformisante. Il suffit de montrer que l'image de $\pi_{\pi(x)}$ dans $\mathcal{O}_{X^{an},x}$ (que l'on notera encore $\pi_{\pi(x)}$) est un élément régulier. Or le théorème 6.26 assure que le morphisme $\mathcal{O}_{X,\rho(x)} \to \mathcal{O}_{X^{an},x}$ est un morphisme plat. Ainsi le morphisme $\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(\mathcal{A}),\rho(\pi(x))} \to \mathcal{O}_{X^{an},x}$ est plat et donc $\pi_{\pi(x)}$ est un élément régulier de $\mathcal{O}_{X^{an},x}$. □

Nous pouvons maintenant montrer un théorème de comparaison entre la dimension d'un schéma sur un anneau d'entiers de corps de nombres et la dimension de son analytifié.

Théorème 6.30. *Soient $\mathcal{A}$ un anneau d'entiers de corps de nombres, X un schéma de type fini sur $\mathcal{A}$ et x un point de X^{an}. La dimension de X^{an} en x est égale à la dimension de X en $\rho(x)$.*

Démonstration du théorème. Soient $x \in X^{an}$ et $U = \mathrm{Spec}(A)$ un voisinage affine de $\rho(x)$ dans X. Il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que U soit un sous-schéma fermé de $\mathbb{A}^k_{\mathcal{A}}$. On note I l'idéal de $\mathcal{A}[T_1, \ldots, T_k]$ correspondant. Le théorème 6.8 assure qu'il existe (P_i) une famille finie d'idéaux premiers de $\mathcal{A}[T_1, \ldots, T_k]$ tels que I soit égale à l'intersection de tous les P_i. On note (U_i) la famille finie de sous-schémas fermés de U correspondant et on pose $A_i := \mathcal{A}[T_1, \ldots, T_k]/P_i$. Nous allons dans un premier temps montrer que la dimension de U_i et la dimension de U_i^{an} sont les mêmes pour tout i, puis nous montrerons que U^{an} est égale en tant qu'ensemble à l'union des U_i^{an}.

Soit U_i un des éléments de la famille évoquée plus haut, montrons que U_i^{an} est de même dimension en x que la dimension de U_i. Nous allons distinguer deux cas.

Supposons que le morphisme $\mathcal{A} \to A_i$ n'est pas injectif. On note P le noyau de ce morphisme. Puisque A_i est intègre P correspond à un point b non générique de $\mathrm{Spec}(\mathcal{A})$. Ainsi A_i est une algèbre de type fini sur le corps $k(b) = \mathcal{A}/P$ (attention de ne par confondre cette notation avec $\kappa(b)$ qui est le corps résiduel d'un point d'un espace analytique). Le théorème de normalisation de Noether (voir par exemple le Lemme 2 de [Mat89]) assure qu'il existe n tel que A_i contienne une algèbre de la forme $k(b)[T_1, \ldots, T_n]$ et tel que A_i soit un $k(b)[T_1, \ldots, T_n]$-module de type fini. Le fait que A_i soit intègre implique que le morphisme $U_i \to \mathbb{A}^n_{k(b)}$ est un morphisme fini sans-torsion. On note encore b l'unique point de $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ correspondant à $b \in \mathrm{Spec}(\mathcal{A})$. La proposition 6.28 assure que le morphisme que l'on en déduit $U_i^{an} \to (\mathbb{A}^n_{k(b)})^{an} \simeq \mathbb{A}^{n,an}_{\mathscr{H}(b)}$ est lui aussi fini et sans torsion. Ainsi la proposition 5.15 assure que c'est un morphisme fini et ouvert, l'espace $\mathcal{A}$-analytique U_i^{an} est donc de dimension n.

Supposons que le morphisme $\mathcal{A} \to A_i$ est injectif. On note K le corps des fractions de $\mathcal{A}$. Une fois de plus, le Théorème de normalisation de Noether assure qu'il existe n tel que $A_i \otimes_{\mathcal{A}} K$ contienne une algèbre de la forme $K[T_1, \ldots, T_n]$ et tel que A_i soit un $K[T_1, \ldots, T_n]$-module de type fini. Puisque A_i est une algèbre de type finie sur $\mathcal{A}$, il existe un élément a de $\mathcal{A}$ tel que le morphisme $\mathcal{A}_a[T_1, \ldots, T_n] \to A_i \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{A}_a$ soit encore une injection qui donne à $A_i \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{A}_a$ une structure de $\mathcal{A}_a[T_1, \ldots, T_n]$-module de type fini. Ainsi le morphisme $\mathrm{Spec}(A_i) \times \mathrm{Spec}(\mathcal{A}_a) \to \mathbb{A}^n_{\mathcal{A}} \times \mathrm{Spec}(\mathcal{A}_a)$ est un morphisme finie sans torsion. On note U_a l'ouvert de $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ correspondant à l'analytification de $\mathrm{Spec}(\mathcal{A}_a)$. La proposition 6.28 assure que le morphisme que l'on en déduit $U_i^{an} \times U_a \to \mathbb{A}^{n,an}_{\mathcal{A}} \times U_a$ est lui aussi fini et sans torsion. Ainsi la proposition 5.15 assure que c'est un morphisme fini et ouvert, l'espace $\mathcal{A}$-analytique $U_i^{an} \times U_a$ est donc de dimension $n + 1$.

Montrons maintenant que U^{an} est égal en tant qu'ensemble à l'union de ces sous-espaces analytiques U_i^{an}. Soit $y \in U^{an}$. Par construction du foncteur d'analytification, pour tout $f \in I$, $|f(y)| = 0$. Or puisque la semi-norme correspondant à y est multiplicative son noyau est un idéal premier, il contient donc en particulier un des P_i. Ainsi il existe i tel que y appartienne à U_i^{an}.

Enfin, on en déduit que la dimension de U^{an} en x est égale au maximum des dimensions de U_i^{an} en ce point qui est égale à la dimension relative de U en x. Ainsi, il y a égalité entre la dimension relative de X et celle de X^{an}. $\square$

Annexe A

Un lemme d'algèbre

Dans cette annexe nous donnons une démonstration d'un lemme d'algèbre utile pour montrer que dans le cadre de la géométrie analytique complexe pour tout espace $\mathbb{C}$-analytique X, le morphisme :

$$\begin{array}{rccc} s: & \mathrm{Hom}(X,\mathbb{C}^n) & \to & \mathcal{O}_X(X)^n \\ & (\varphi,\varphi^{\#}) & \mapsto & (\varphi^{\#}(T_1),\dots,\varphi^{\#}(T_n)) \end{array}$$

où $T_1,\dots,T_n$ sont les fonctions coordonnées de $\mathbb{C}^n$, est une bijection.

Lemme A.1. *Soient (A,m) et (B,n) deux $\mathbb{C}$-algèbres locales noethériennes de corps résiduels $\mathbb{C}$. Soient aussi $f:(A,m)\to(B,n)$ et $g:(A,m)\to(B,n)$ deux morphismes de $\mathbb{C}$-algèbres locales. Si f et g coïncident sur une famille génératice de l'idéal maximal m, les deux morphismes $f:(A,m)\to(B,n)$ et $g:(A,m)\to(B,n)$ sont égaux.*

Démonstration du lemme. Le Théorème d'Artin Rees assure que (puisque les anneaux sont noethériens) pour montrer que ces deux morphismes sont égaux il suffit de montrer que pour tout $i\in\mathbb{N}^*$ les morphismes $f_i:A/m^i\to B/n^i$ et $g_i:A/m^i\to B/n^i$ sont égaux. Nous allons montrer cet énoncé par récurrence sur $i\in\mathbb{N}^*$.

Si $i=1$, cela provient du fait que f et g soit des morphismes de $\mathbb{C}$-algèbres et que $A/m\simeq B/n\simeq\mathbb{C}$.

Supposons que nous ayons montré que f_i et g_i sont égaux et montrons qu'il en est de même pour f_{i+1} et g_{i+1}.

Pour cela, nous allons montrer par une seconde récurrence descendante sur j que pour tout $1\leq j\leq i+1$, m^j/m^{i+1} est inclus dans le noyau de $f_{i+1}-g_{i+1}:A/m^{i+1}\to B/n^{i+1}$.

Si $j=i+1$, il n'y a rien à montrer.

Soit $j\geq 2$. Supposons que nous ayons montré que m^j/m^{i+1} inclus dans le noyau de $f_{i+1}-g_{i+1}:A/m^{i+1}\to B/n^{i+1}$. Montrons que m^{j-1}/m^{i+1} est, lui aussi, inclus dans son noyau.

Soit $a\in A/m^{i+1}$. Par hypothèse de récurrence sur i, $f_{i+1}(a)-g_{i+1}(a)$ appartient à l'idéal n^i/n^{i+1}. Le morphisme de groupe $f_{i+1}-g_{i+1}:A/m^{i+1}\to B/n^{i+1}$ se factorise donc par n^i/n^{i+1}. Par hypothèse de récurrence sur j, cette fois-ci, le morphisme de groupe se factorise par $f_{i+1}-g_{i+1}:A/m^j\to n^i/n^{i+1}$.

Le groupe m^{j-1}/m^j possède naturellement une structure de k-espace vectoriel. De même, le morphisme $f : k \to l$ induit aussi sur n^i/n^{i+1} une structure de k-espace vectoriel. Pour ces structures, le morphisme de groupes $f_{i+1} - g_{i+1} : m^{j-1}/m^j \to n^i/n^{i+1}$ est un morphisme de k-espaces vectoriels. En effet, soit $a \in k$ et $b \in m^{j-1}/m^j$. Il nous faut montrer que $(f_{i+1} - g_{i+1})(ab) = f(a)(f_{i+1} - g_{i+1})(b)$ ou de manière équivalente que pour tout relèvement $\overline{a} \in A$ et $\overline{b} \in m^{j-1}$, $(f-g)(\overline{a}\overline{b}) - f(\overline{a})(f-g)(\overline{b})$ appartient à n^{i+1}. Cela découle de l'égalité :

$$\begin{array}{rcl}(f-g)(\overline{a}\overline{b}) - f(\overline{a})(f-g)(\overline{b}) & = & f(\overline{a})f(\overline{b}) - g(\overline{a})g(\overline{b}) - f(\overline{a})f(\overline{b}) + f(\overline{a})g(\overline{b}) \\ & = & (f(\overline{a}) - g(\overline{a}))g(\overline{b})\end{array}.$$

En effet, par hypothèse $g(\overline{b})$ appartient à n et $f(\overline{a}) - g(\overline{a})$ appartient à n^i.

Maintenant, $f_{i+1} - g_{i+1} : m^{j-1}/m^j \to n^i/n^{i+1}$ est un morphisme de k-espaces vectoriels qui est nul sur une famille génératrice m^{j-1}/m^j comme k-espace vectoriel. Il est donc nul. Ainsi m^{j-1}/m^{i+1} est inclus dans le noyau du morphisme $f_{i+1} - g_{i+1} : A/m^{i+1} \to B/n^{i+1}$.

Ainsi m/m^{i+1} est inclus dans le noyau $f_{i+1} - g_{i+1} : A/m^{i+1} \to B/n^{i+1}$. Il nous faut maintenant montrer que le morphisme $f_{i+1} - g_{i+1} : \mathbb{C} \to B/n^{i+1}$ ainsi construit est nul.

Pour remarquer cela, il suffit de remarque que pour tout $x \in \mathbb{C}$, l'élément x admet un antécédent $x' \in A/m^{i+1}$ pour la projection $A/m^{i+1} \to \mathbb{C}$ tel que $f_{i+1}(x') = g_{i+1}(x')$. Or, si l'on note $1_{A/m^{i+1}}$ l'unité de A/m^{i+1} et $1_{B/n^{i+1}}$ l'unité de B/n^{i+1}, puisque f_{i+1} et g_{i+1} sont des morphismes de $\mathbb{C}$-algèbres pour tout $x \in \mathbb{C}$, nous avons la suite dégalité suivante :

$$f_{i+1}(x1_{A/m^{i+1}}) = g_{i+1}(x1_{A/m^{i+1}}) = x1_{B/n^{i+1}}.$$

De plus, l'image de $x1_{A/m^{i+1}}$ par la projection $A/m^{i+1} \to \mathbb{C}$ est égale à $x \in \mathbb{C}$. Ce qui nous permet d'affirmer que le morphisme d'anneaux $f_{i+1} - g_{i+1} : \mathbb{C} \to B/n^{i+1}$ est nul. Il en est donc de même du morphisme $f_{i+1} - g_{i+1} : A/m^{i+1} \to B/n^{i+1}$.

Ce qui permet de conclure par récurrence sur i. $\square$

Munit de ce lemme, on peut suivre la démonstration de la Proposition 1.3.1 de [GR84].

Bibliographie

[Ber90] Vladimir G. Berkovich : *Spectral theory and analytic geometry over non-Archimedean fields*, volume 33 de *Mathematical Surveys and Monographs.* American Mathematical Society, Providence, RI, 1990.

[Ber93] Vladimir G. Berkovich : Étale cohomology for non-Archimedean analytic spaces. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, 78:5–161 (1994), 1993.

[BGR84] S. Bosch, U. Güntzer et R. Remmert : *Non-Archimedean analysis*, volume 261 de *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences].* Springer-Verlag, Berlin, 1984. A systematic approach to rigid analytic geometry.

[Bou61] N. Bourbaki : *Éléments de mathématique. Fascicule XXVIII. Algèbre commutative. Chapitre 3 : Graduations, filtra- tions et topologies. Chapitre 4 : Idéaux premiers associés et décomposition primaire.* Actualités Scientifiques et Industrielles, No. 1293. Hermann, Paris, 1961.

[Bou98] Nicolas Bourbaki : *General topology. Chapters 5–10.* Elements of Mathematics (Berlin). Springer-Verlag, Berlin, 1998. Translated from the French, Reprint of the 1989 English translation.

[DH84] A. Douady et J. H. Hubbard : *Étude dynamique des polynômes complexes. Partie I*, volume 84 de *Publications Mathématiques d'Orsay [Mathematical Publications of Orsay].* Université de Paris-Sud, Département de Mathématiques, Orsay, 1984.

[Duc] Antoine Ducros : *La structure des courbes analytiques.*

[Eng77] Ryszard Engelking : *General topology.* PWN—Polish Scientific Publishers, Warsaw, 1977. Translated from the Polish by the author, Monografie Matematyczne, Tom 60. [Mathematical Monographs, Vol. 60].

[Eng95] Ryszard Engelking : *Theory of dimensions finite and infinite*, volume 10 de *Sigma Series in Pure Mathematics.* Heldermann Verlag, Lemgo, 1995.

[GR84] Hans Grauert et Reinhold Remmert : *Coherent analytic sheaves*, volume 265 de *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences].* Springer-Verlag, Berlin, 1984.

[GR04] Hans Grauert et Reinhold Remmert : *Theory of Stein spaces.* Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2004. Translated from the German by Alan Huckleberry, Reprint of the 1979 translation.

[GR09] Robert C. Gunning et Hugo Rossi : *Analytic functions of several complex variables*. AMS Chelsea Publishing, Providence, RI, 2009. Reprint of the 1965 original.

[Gro61] A. Grothendieck : Éléments de géométrie algébrique. II. Étude globale élémentaire de quelques classes de morphismes. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (8):222, 1961.

[HK94] Roland Huber et Manfred Knebusch : On valuation spectra. *In Recent advances in real algebraic geometry and quadratic forms (Berkeley, CA, 1990/1991 ; San Francisco, CA, 1991)*, volume 155 de *Contemp. Math.*, pages 167–206. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994.

[HL10] E. Hrushovski et F. Loeser : Non-archimedean tame topology and stably dominated types. *ArXiv e-prints*, septembre 2010.

[Hub94] R. Huber : A generalization of formal schemes and rigid analytic varieties. *Math. Z.*, 217(4):513–551, 1994.

[Mat89] Hideyuki Matsumura : *Commutative ring theory*, volume 8 de *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, second édition, 1989. Translated from the Japanese by M. Reid.

[Poi10] Jérôme Poineau : La droite de Berkovich sur $\mathbb{Z}$. *Astérisque*, (334):viii+xii+284, 2010.

[Poi13] Jérôme Poineau : Espaces de Berkovich sur $\mathbb{Z}$: étude locale. *Invent. Math.*, 194(3):535–590, 2013.

[Ray74] Michel Raynaud : Géométrie analytique rigide d'après Tate, Kiehl,$\cdots$. *In Table Ronde d'Analyse non archimédienne (Paris, 1972)*, pages 319–327. Bull. Soc. Math. France, Mém. No. 39–40. Soc. Math. France, Paris, 1974.

[Sch13] Peter Scholze : Perfectoid spaces : a survey. *In Current developments in mathematics 2012*, pages 193–227. Int. Press, Somerville, MA, 2013.

[SGA03] *Revêtements étales et groupe fondamental (SGA 1)*. Documents Mathématiques (Paris) [Mathematical Documents (Paris)], 3. Société Mathématique de France, Paris, 2003. Séminaire de géométrie algébrique du Bois Marie 1960–61. [Algebraic Geometry Seminar of Bois Marie 1960-61], Directed by A. Grothendieck, With two papers by M. Raynaud, Updated and annotated reprint of the 1971 original [Lecture Notes in Math., 224, Springer, Berlin ; MR0354651 (50 #7129)].

[Tat71] John Tate : Rigid analytic spaces. *Invent. Math.*, 12:257–289, 1971.